# EUCLIDES

## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

9e JAARGANG 1932/33, Nr. 6

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang ƒ 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (ƒ 6.—) of op „Christiaan Huygens" (ƒ 10.—) zijn ingeteekend, betalen ƒ 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

# INHOUD.

| | Blz. |
|---|---|
| Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De Versiera . . . . . . . . . | 233—265 |
| Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Historische Revue . . . . . . | 266—277 |
| Dr. U. H. VAN WIJK, Een maximum- en minimumvraagstuk | 278—282 |
| Boekbesprekingen . . . . . . . . . . . . . . | 283—284 |

LOSSE BANDEN voor den afgeloopen jaargang verkrijgbaar bij den Uitgever P. NOORDHOFF te GRONINGEN à f 1.25.

# DE VERSIERA

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

§ 1. In een voordracht, op 1 April 1932 op het eerste Congres van leeraren in wiskunde en natuurwetenschappen door Prof. L. G. M. Baas Becking gehouden [1]), werd door den spreker onder de kromme lijnen, die toepassing vinden in de hedendaagsche biologie, er een genoemd, die aan het groote meerendeel der aanwezige wiskundigen zeer waarschijnlijk geheel onbekend is geweest: de Versiera. Naar aanleiding van een tot haar gerichte vraag, noodigde de redactie van dit tijdschrift mij uit, iets over deze kromme en hare beteekenis voor de geschiedenis der wiskunde mee te deelen, aan welk verzoek ik in de volgende bladzijden tracht te voldoen.

§ 2. De literatuur over speciale krommen, die men samengevat kan vinden in de twee groote standaardwerken van F. Gomes Teixeira [2]) en van Gino Loria [3]), verbindt aan de Versiera den naam van de Italiaansche mathematica Maria Gaetana Agnesi [4]). Deze blijkt in haar eertijds zeer bekend leerboek van de Analytische Meetkunde en de Infinitesimaalrekening, dat in 1748 te Milaan het licht zag, de *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventu' Italiana* [5]), de kromme te vinden als oplossing van het volgende probleem [6]):

„Als gegeven is de halve cirkel *ADC* met diameter AC, vraagt men buiten dien cirkel het punt *M* zoo te bepalen, dat, wanneer *MB*, loodrecht op den diameter *AC*, den cirkel in *D* snijdt, de eigenschap geldt *AB, BD* :: *AC* tot *BM*; en, omdat er oneindig veel punten *M* zijn, die aan de vraag voldoen, vraagt men hun meetkundige plaats."

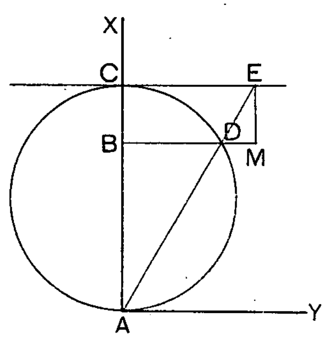


Fig. 1.

Het punt $M$, dat aan de voorwaarde

$$AB : BD = AC : BM$$

voldoet, wordt blijkbaar geconstrueerd door het snijpunt $E$ te bepalen van de rechte $AD$ en de raaklijn van den cirkel in $C$ en door $E$ een rechte, evenwijdig aan $CA$, te trekken. Deze snijdt het verlengde van $BD$ in het gevraagde punt $M$.

De middellijn van den cirkel $a$ stellende, vindt Agnesi voor de vergelijking van de kromme ten opzichte van een assenstelsel, waarvan de oorsprong in $A$, de $X$-as langs $AC$ en de $Y$-as langs de raaklijn in $A$ aan den cirkel wordt gekozen:

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{\sqrt{x(a-x)}}$$

of

$$y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Zonder toelichting vermeldt zij hierbij, dat de gevonden meetkundige plaats dus de *Versiera* is. Blijkbaar was dit dus destijds reeds een bekende kromme, die in het gestelde vraagstuk als oplossing optreedt en waaraan dus de naam van Agnesi evenmin verbonden behoort te worden als aan een der vele andere bekende krommen, die zij, zooals iedere schrijver van een leerboek doet, in haar werk behandelt. Het ligt dus voor de hand te vragen, waar de kromme reeds eerder voorkomt en tevens een verklaring voor haar naam te zoeken.

§ 3. Nu worden in de bovengenoemde werken over speciale krommen reeds de plaatsen vermeld, waar men dit onderzoek kan instellen [7]). Het is bekend, dat de door Agnesi behandelde kromme reeds voorkomt bij Fermat [8]) en dat zij haar naam heeft gekregen van den Pisaanschen wiskundige Guido Grandi [9]), die haar vanaf 1703 in zijn werken bestudeert en toepast. Voordat we echter tot de bestudeering van deze twee schrijvers overgaan, behandelen we eerst het verloop van de kromme onder vermelding van enkele eigenschappen, waarvan de lezer de geldigheid gemakkelijk zal kunnen inzien.

Op het assenstelsel van fig. 2 luidt de vergelijking

$$x = a\sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

of, in rationalen vorm

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

en homogeen gemaakt:

$$y(x^2 + a^2z^2) - a^3z^3 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

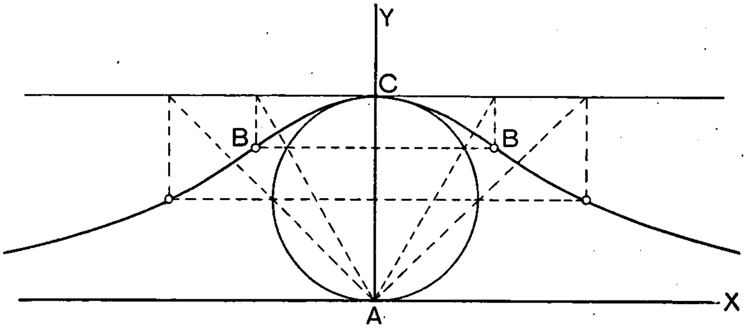



Fig. 2.

Uit (1) leest men af, dat de kromme van den derden graad is, en dat de $Y$-as symmetrieas is; uit (2), dat het oneigenlijke punt van de $Y$-as een geisoleerd dubbelpunt is en de $X$-as buigasymptoot.

De kromme gedoogt de rationale parametervoorstelling

$$\mu x = 1 + a^2\lambda^2$$
$$\mu y = a^3\lambda^3$$
$$\mu z = \lambda(1 + a^2\lambda^2)$$

waaruit men als voorwaarde voor het collineair zijn van drie harer punten met parameters $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vindt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - a^2\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0.$$

Hieruit volgt als voorwaarde voor een buigpunt

$$3\lambda - a^2\lambda^3 = 0$$

Er zijn dus drie buigpunten, namelijk voor de parameterwaarden

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{a}, \quad \lambda_3 = \frac{-\sqrt{3}}{a}.$$

Het eerste is het oneigenlijke punt van de $X$-as; de beide andere zijn de punten $B\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. In overeenstemming met een alge-

meene eigenschap van een rationale kubische kromme liggen de drie buigpunten op een rechte, namelijk $y = \frac{3}{4}a$.

§ 4. Teruggaande tot het verleden, beschouwen we thans eerst de wijze waarop de kromme voorkomt bij Fermat. Deze vermeldt haar (zonder naam) in een verhandeling over de quadratuur van vlakke krommen, die onder den titel *De Aequationum localium transmutatione et emendatione* voorkomt in de editie, waarin Samuel Fermat in 1679 een groot aantal nagelaten geschriften van zijn vader liet verschijnen [10]. In deze verhandeling, waarin, lang voor de opstelling van den infinitesimaal-algorithmus van Leibniz en Newton, integratiemethoden worden ontwikkeld, die, op notatieverschillen na, met bekende stellingen uit dien algorithmus identiek zijn, wordt in de eerste plaats het algemeene quadratuurprobleem behandeld voor alle hyperbolen, d.w.z. voor alle krommen, die in de notatie der hedendaagsche analytische meetkunde de vergelijking

$$x^m y^n = c \qquad (m, n \text{ positief geheel}^{11}))$$

hebben en voor alle parabolen, d.w.z. de krommen, bepaald door

$$y^n = c \,.\, x^m \qquad (m, n \text{ positief geheel}^{12})).$$

Daarna worden nieuwe wegen ingeslagen in de hieronder volgende beschouwingen [13], die in de linkerkolom in letterlijke vertaling worden weergegeven, terwijl ze in de rechterkolom zijn overgebracht in de taal der hedendaagsche wiskunde.

Zij *ABDN* een willekeurige kromme met basis *HN*, diameter *AH*, applicaten aan den diameter

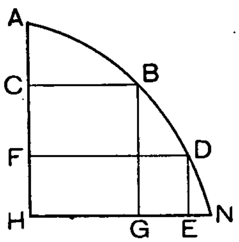



Fig. 3.

*CB*, *FD*, applicaten aan de basis *BG*, *DE*. En laat de applicaten voortdurend afnemen vanaf de

Zij *ABDN* een willekeurige kromme, voorgesteld in een assenstelsel met oorsprong *H*, de *X*-as langs *HA*, de *Y*-as langs *HN*. Zij voor $y = 0$ $x = a$; voor $x = 0$ $y = b$ en laat $y$ in het $x$-interval $[0 \ldots a]$ een monotoon dalende functie van $x$ zijn.

Nu is

$$\int_0^a y^2 dx = 2\int_0^b xy\, dy.$$

basis naar den top, zooals hier $HN$ grooter is dan $FD$ en $FD$ grooter dan $CB$ en zoo voort. De figuur, samengesteld uit de quadraten van $HN$, $FD$, $CB$, geappliceerd aan de rechte $AH$ (dat is het lichaam bestaande uit het quadraat van $CB$ maal $CA$ en uit het quadraat van $FD$ maal $FC$ en uit het quadraat van $HN$ maal $HF$[14]) ) is steeds gelijk aan de figuur, samengesteld uit de rechthoeken $BG$ maal $GH$, $DE$ maal $EH$, dubbel genomen en aan de basis $HN$ geappliceerd (dat is het lichaam, bestaande uit $BG$ maal $2\,GH$ maal $GH$ en uit $DE$ maal $2\,EH$ maal $EG$) enz. aan beide kanten tot in het oneindige.

Hierna worden op dezelfde manier stellingen uitgesproken, die, uitgedrukt in de symboliek der integraalrekening, aldus luiden

$$\int_0^a y^3\,dx = 3\int_0^b y^2 x\,dy,$$

$$\int_0^a y^4\,dx = 4\int_0^b y^3 x\,dy.$$

Het door Fermat verkregen resultaat (over welks mogelijke motiveering in § 8 wordt gesproken) is dus aequivalent met de stelling der integraalrekening, die in algemeenen vorm luidt

$$\int_0^a y^n\,dx = n\int_0^b y^{n-1} x\,dy \qquad (n \text{ geheel positief})$$

onder voorwaarde, dat bij de partieele integratie van het eerste lid het geintegreerde stuk $y^n x \Big|_{x=0}^{x=a}$ wegvalt. Dat is bij Fermat wegens de over de kromme gemaakte onderstellingen het geval.

§ 5. Met behulp van de verkregen eigenschap kunnen nu nieuwe quadraturen worden afgeleid. Fermat voert hiertoe de volgende (aan Vieta ontleende) notatie in: diameter $AH = B$, basis $HN = D$,

de veranderlijke applicaat van den diameter $E$, de veranderlijke applicaat van de basis $A$. Denk nu een grondkromme (curva constitutiva) van bekende quadratuur, b.v. een cirkel

$Bq$ — $Aq$ aequale $Eq$ $\qquad b^2 - x^2 = y^2.$

Leid nu uit deze kromme een andere af door de transformatie

$$\frac{B \text{ in } U}{E} \text{ aeq. } A \qquad \frac{b\bar{x}}{y} = x.$$

Door substitutie ontstaat nu

$Bq$ in $Eq$—$Eqq$ aeq. $Bq$ in $Uq$. $\qquad b^2y^2 - y^4 = b^2\bar{x}^2.$

dat is de vergelijking van een nieuwe kromme $HOPN$, die ontstaat uit de gegeven grondkromme

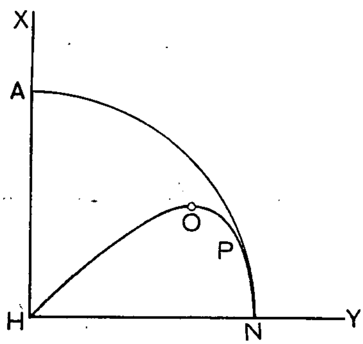



Fig. 4.

en waarin, daar alle producten van $B$ met $U$ gegeven zijn, bij applicatie van al die producten aan $B$, de som van alle $U$'s, geappliceerd aan de basis, gegeven is (zooals al bewezen is), d.w.z. dat het oppervlak $HOPN$ in rechtlijnige grootheden gegeven zal zijn en dus zijn quadratuur.

Nu is

$$b\bar{x} = xy$$

dus

$$\int_0^b \bar{x}\,dy = \frac{1}{b}\int_0^b xy\,dy =$$

$$\frac{1}{2b}\int_0^b y^2\,dx = \frac{1}{2b}\int_0^b (b^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}b^2 = \frac{1}{3}b^2.$$

Dat Fermat het resultaat van de berekening niet vermeldt, kan geen bezwaar zijn, om de kennis daarvan bij hem aanwezig te achten; immers in de voorafgaande deelen der verhandeling behandelt hij èn de integratie van een veelterm èn de quadratuur van alle parabolen. De geheele verhandeling is echter een particuliere

aanteekening, die waarschijnlijk niet voor publicatie bestemd was; het is volkomen begrijpelijk dat Fermat, waar hij de mogelijkheid der berekening kan overzien, haar niet ten einde toe uitvoert.

§ 6. Door een omkeering van de in § 5 aan een voorbeeld toegelichte methode slaagt Fermat er nu enkele bladzijden verder in, om de quadratuur van de kromme

*Bc* aequalis *Aq* in *E* + *Bq* in *E* $\qquad b^3 = x^2y + b^2y,$

waarin we de Versiera herkennen, af te leiden. Hij vermeldt, dat de opgave hem door een ervaren geometer gesteld was; het is mogelijk, dat dit de Jezuiet Antoine de La Loubère [15]) geweest is, in wiens *Geometria Veterum promota in septem de cycloide libris* Fermat in 1660 zijn eerste (anonieme) publicatie heeft doen verschijnen. Daar het mij echter niet gelukt is, de werken van La Loubère op te sporen, heb ik niet kunnen nagaan, of deze de kromme ook vermeldt en hoe hij er aan gekomen is.

Fermat behandelt haar als volgt:

| | |
|---|---|
| Indien alle *E*'s gegeven zijn, zijn ook alle rechthoeken gegeven, die omvat worden door een gegeven rechte (nl. *B*) en *E*. Laat nu zulk een rechthoek gelijk zijn aan een quadraat *Oq*. Dus $\frac{Oq}{B}$ aeq. *E* dan ontstaat, door inplaats van *E* deze nieuwe waarde te substitueeren. | Voer een nieuwe veranderlijke $\bar{y}$ in door de relatie $\frac{\bar{y}^2}{b} = y$ dan gaat de vergelijking over in $b^4 = x^2\bar{y}^2 + b^2\bar{y}^2.$ |
| *Bqq* aeq. *Aq* in *Oq* + *Bq* in *Oq* .... die een nieuwe kromme voorstelt, waarvan te onderzoeken is, of alle *Oq* gegeven zijn, Stel nu $\frac{B \text{ in } U}{O}$ aeq. *A* dan ontstaat, door inplaats van | Stel nu $\frac{b\bar{x}}{\bar{y}} = x.$ De vergelijking wordt nu $b^4 - b^2\bar{y}^2 = b^2\bar{x}^2$ of $b^2 - \bar{y}^2 = \bar{x}^2.$ |

*A* deze waarde te substitueeren

*Bqq* — *Bq* in *Oq* aeq. *Bq* in *Uq* en, na deeling door *Bq*, *Bq* — *Oq* aeq. *Uq* welke vergelijking een cirkel bepaalt; hierin zijn echter, als men de quadratuur van den cirkel bekend onderstelt, alle *U*'s gegeven. Keeren we nu terug naar de eerste kromme, waarin

*Bc* aeq. *Aq* in *E* + *Bq* in *E*

dan blijkt, dat het hierdoor ontstane oppervlak met behulp van de quadratuur van den cirkel kan worden bepaald en onze analyse heeft dit kort en gemakkelijk uitgevoerd door twee krommen, die van de vorige verschillen .... Ik zeg dus, dat door de achtereenvolgende toepassing van de reeds behandelde analytische bewerkingen het oppervlak < tusschen de kromme en de asymptoot > gelijk is aan het dubbele van den cirkel met diameter *B*.

De quadratuur van het oppervlak, dat door de kromme, de symmetrie-as en de asymptoot wordt ingesloten, verloopt nu als volgt:

$$\int_0^\infty y\,dx = \frac{1}{b}\int_0^\infty \bar{y}^2 dx =$$

$$= \frac{2}{b}\int_0^b x\bar{y}\,d\bar{y} = 2\int_0^b \bar{x}\,d\bar{y} =$$

$^1/_2$ . oppervlakte van den cirkel met straal $b = 2$ . oppervlakte van den cirkel met diameter *b*.

Om de juistheid van het verkregen resultaat te waarborgen, moeten we ons echter nog overtuigen, of bij de hier uitgevoerde partieele integratie het geintegreerde stuk wegvalt; immers aan de oorspronkelijk gestelde voorwaarde, dat de kromme de *X*-as in een eigenlijk punt zal snijden, is niet voldaan. Nu is echter

$$\int_0^\infty \bar{y}^2\,dx = \bar{y}^2 x\Big|_{x=0}^{x=\infty} - 2\int_b^0 \bar{y}x\,d\bar{y}$$

waarin $x\bar{y}^2 = x\,by = \frac{xb^4}{x^2+b^2}$. Hieruit volgt inderdaad $\lim\limits_{x\to\infty} x\bar{y}^2 = 0$.

§ 7. Uit de transformatieformules

$$\bar{y}^2 = by, \quad b\bar{x} = x\bar{y},$$

toe te passen op den cirkel

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

volgt natuurlijk een constructie van de punten van de kromme.

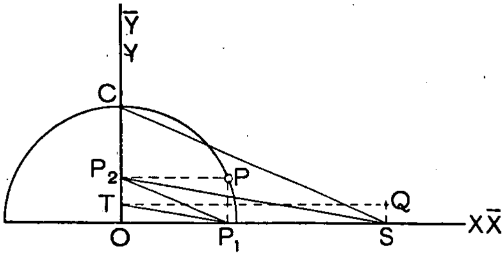



Fig. 5.

Is nl. $P$ een punt van den cirkel (1) met coördinaten $OP_1 = \bar{x}$ en $OP_2 = \bar{y}$, dan vindt men wegens

$$\bar{y} : \bar{x} = b : x$$

voor het aan $P$ toegevoegde punt $Q$ der kromme

$$OS = x$$

wanneer $CS$ door $C$ evenwijdig aan $P_2P_1$ is getrokken en daarna wegens

$$y : \bar{y} = \bar{y} : b = \bar{x} : x$$

$OT = SQ = y$ door $P_1T$ evenwijdig aan $SP_2$ te trekken.

Het is nu echter eigenaardig, dat Fermat niet deze constructie voor de punten van de kromme geeft, maar een andere, die niet onmiddellijk verband houdt met de gebruikte transformatie.

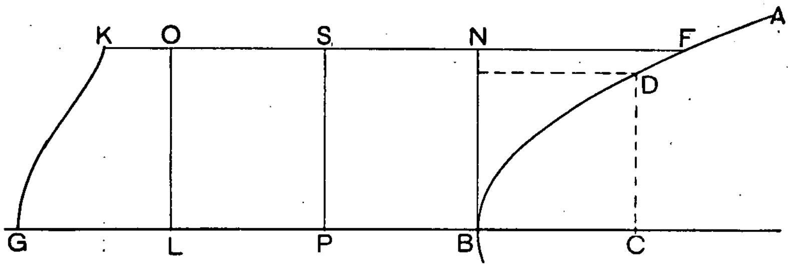



Fig. 6.

Zij nl. [16]) $BDFA$ een parabool met vergelijking

$$y^2 = bx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Maak $BP = PL = b$ en construeer bij een willekeurig punt $F$ van de parabool een punt $K$, zoodat

$$FS : SO = SO : OK$$

dan doorloopt $K$ de bedoelde kromme. Dat dit juist is, blijkt door de transformatie te schrijven als

$$\bar{x} = \frac{b^2}{b + x}, \text{ waarin } OK = \bar{x}.$$

Uit (2) volgt dan door de substitutie

$$x = \frac{b^2}{\bar{x}} - b$$

$$y^2 = \frac{b^3}{\bar{x}} - b^2 \quad \text{of} \quad \bar{x} = \frac{b^3}{b^2 + y^2},$$

d.i. de Versiera ten opzichte van *LO* als *Y*-as en *LG* als *X*-as.

§ 8. De ten deele slechts fragmentarisch uiteengezette beschouwingen over quadratuur van Fermat zijn uitvoeriger behandeld door Christiaan Huygens in een aanteekening uit het jaar 1692 [17]). We ontleenen hieraan een bewijs voor de door Fermat zonder bewijs meegedeelde betrekking, die aequivalent is met de formule

$$\int_0^a y^2\,dx = 2\int_0^b xy\,dy,$$

waarin de integratie wordt uitgevoerd langs een kromme *C*, die de *X*-as snijdt in $A(a, 0)$ en de *Y*-as in $B(0, b)$.

Huygens beschouwt een rechten cylinder, die *C* en de beide assegmenten *OA* en *OB* tot richtkrommen heeft. Een vlak door *OX*, dat een hoek van 45° met het vlak *OXY* maakt, snijdt van dezen cylinder een cylinderhoef af. Van dezen hoef zijn de doorsneden met vlakken, evenwijdig aan *OX*, rechthoeken *CDEF* met oppervlak $xy$ (wegens $FC = OC$), de doorsneden met vlakken, evenwijdig aan *OY*, rechthoekige gelijkbeenige driehoeken *GHK* met oppervlakte $\frac{1}{2}y^2$. Vermenigvuldigt men nu elk der rechthoeken *CDEF* met een van het groote aantal gelijke particulae waarin men *OB* verdeeld denkt en evenzoo elken driehoek *GHK* met een van de aan de vorige gelijke particulae van *OA*, dan vindt men op twee wijzen den inhoud van den hoef als som van producten van doorsneden en particulae (differentialen, in den historischen zin van het woord). Hieruit volgt, in de terminologie

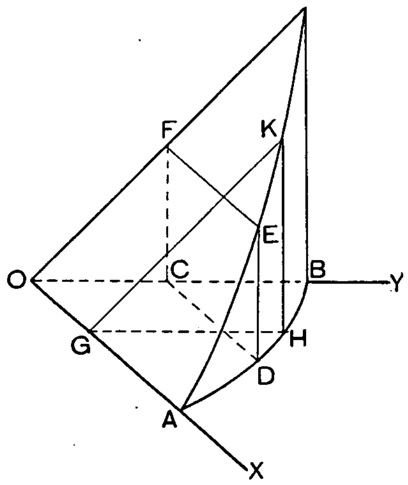


Fig. 7.

van Huygens, dat de som der producten $\bar{x}\bar{y}$ gelijk is aan de halve som der vierkanten $y^2$ en in de symboliek der integraalrekening de stelling

$$\int_0^a y^2 dx = 2\int_0^b xy\,dy.$$

We merken nog op, dat Huygens, in afwijking van Fermat, de Versiera wel construeert door van een cirkel uit te gaan en hierop de in § 7 vermelde transformaties toe te passen [18]).

§ 9. Een eenvoudigere voortbrengingswijze van de Versiera uit een cirkel dan de door Fermat analytisch geformuleerde en door Huygens meetkundig uitgevoerde, die we boven behandelden, verkrijgt men, door de bij Fermat voorkomende transformatie in den vorm

$$\bar{x} = a\frac{x}{y} \quad \bar{y} = y$$

toe te passen op den cirkel met middellijn $a$, die in den oorsprong aan de $X$-as raakt

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Men vindt dan door de substitutie

$$x = \frac{\bar{x}\bar{y}}{a} \quad y = \bar{y}$$

de vergelijking

$$\bar{y}\left[\frac{\bar{x}^2\bar{y}}{a^2} + \bar{y} - a\right] = 0$$

waaruit, na afsplitsing van de rechte $\bar{y} = 0$, de kromme

$$\bar{y} = \frac{a^3}{\bar{x}^2 + a^2}$$

overblijft. Het blijkt dan, dat de Versiera thuis hoort in de groep van krommen van den derden graad, die door Newton als z.g. hyperbolismen van kegelsneden zijn gedefinieerd. De omschrijving hiervan [19]) luidt als volgt:

„Ik noem hyperbolisme van een figuur <een figuur> waarvan de ordinaat ontstaat, door den rechthoek, omvat door den ordinaat der gegeven figuur en een gegeven rechte, aan te passen aan de gemeenschappelijke abscis."

Stellen we de gemeenschappelijke abscis door $y$, de ordinaat van de gegeven kromme door $x$ en die van de voortgebrachte door $\bar{x}$ voor, dan beduidt dit

$$\bar{x} = \frac{ax}{y}, \quad \bar{y} = y.$$

Constructief worden de punten van het hyperbolisme verkregen, door de rechte, die $O$ met een punt $P$ $(x, y)$ van de gegeven kromme verbindt, in $S$ te snijden met de rechte $y = a$ en nu het snijpunt $Q$ te bepalen van de rechten door $P$ en $S$, opv. evenwijdig aan $X$-as en $Y$-as getrokken. Blijkbaar is nu $Q$ een punt van het hyperbolisme; immers

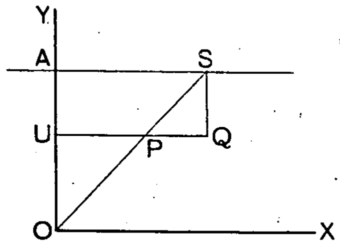


Fig. 8.

$$UQ : x = a : y$$

Gaat de gegeven kromme door $O$, dan splitst zich van het transformatieresultaat de rechte $y = O$ af; dit is meetkundig duidelijk; immers als $P$ in $O$ valt, is $S$ onbepaald en $Q$ kan dus elk punt van de $X$-as zijn. In de restkromme komt natuurlijk ook nog een punt voor, dat met $O$ correspondeert, omdat $OP$ wel een bepaald punt $S$ op $y = a$ oplevert, wanneer $P$ over de kromme tot $O$ nadert. Voor krommen, die in $O$ aan de $X$-as raken, zal met $O$ steeds het oneigenlijke punt van de $X$-as correspondeeren.

Blijkbaar is een hyperbolisme van een figuur bepaald door het geven van de grootheid $a$; noemen we de rechte $y = a$ daarom de fundamentaalrechte der transformatie, dan kunnen we nu de Versiera karakteriseeren als hyperbolisme van een cirkel, die in den oorsprong aan de $X$-as raakt met de raaklijn in het tegenpunt van den oorsprong als fundamentaalrechte [19a]). Het is duidelijk, dat de hier behandelde voortbrengingswijze geen andere is als die in § 2 werd besproken.

Volledigheidshalve merken we nog op, dat de Versiera in de classificatie van Newton als metrisch speciaal geval thuishoort in de derde soort van de hyperbolismen van een ellips, welke het 63e geval van de derde-graads-krommen vormt.

§ 10. We gaan thans over tot de bestudeering van de tweede

bovenvermelde bron voor de geschiedenis van de Versiera, welke men in de werken van Guido Grandi ter beschikking heeft. In de eerste plaats moet dan beschouwd worden het vrij zeldzame werk over de quadratuur van den cirkel en de hyperbool [20]), waarnaar hij als „libro mio delle quadrature” steeds verwijst, wanneer hij in andere werken over de kromme komt te spreken.

In Prop. IV van dit werk definieert hij een kromme lijn als volgt: *IK* is de middellijn van een cirkel met diameter *a*; een veranderlijke rechte door *I* snijdt den cirkel opnieuw in *H* en de raaklijn van den cirkel door *K* in *G*. Projecteer nu *H* op *IK* in *L* en maak op de loodlijn, door *G* op *KG* opgericht, $GD = IL$. Het punt *D* beschrijft dan de te bestudeeren kromme. Daar nu het lijnstuk *IL* de *sinus versus* [21]) is van den correspondeerenden cirkelboog *IH*, wordt de kromme door Grandi met den Latijnschen naam *Versoria* of den Italiaanschen *Versiera* betiteld [22]).

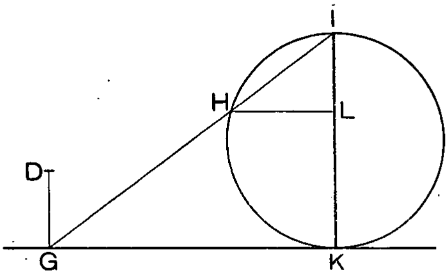


Fig. 9.

Dat de kromme met de in § 2 voortgebrachte identiek is, blijkt als volgt: De coördinaten van *D* ten opzichte van een coördinatenstelsel, waarvan de oorsprong in *K*, de *X*-as langs de raaklijn in *K* en de *Y*-as langs *KI* ligt, zijn gebonden aan de relatie

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{y(a-y)}}{y}.$$

De vergelijking luidt dus

$$x = a\sqrt{\frac{a-y}{x}}$$

welke vergelijking na verwisseling van *x* en *y* identiek is met de in § 2 aan Agnesi ontleende.

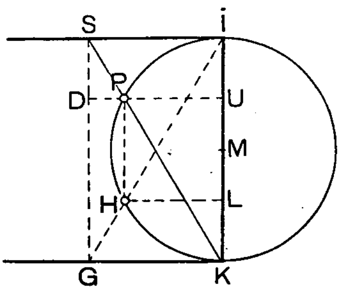


Fig. 10.

De wijze, waarop de twee voortbrengingen samenhangen, is ook meetkundig duidelijk. Vindt men nl. volgens Agnesi door den voerstraal *KS* te gebruiken, uit het punt *P* van den cirkel het punt *D* van de Versiera, dan is, wanneer *SG* evenwijdig aan *IK* getrokken

is, $DG = UK = IL$, dus ontstaat $D$ volgens Grandi met behulp van den voerstraal $IG$.

§ 11. Na de kromme aldus te hebben voortgebracht, behandelt Grandi langs meetkundigen weg het door Fermat ontdekte verband tusschen haar quadratuur en die van den cirkel. Hij toont daarbij

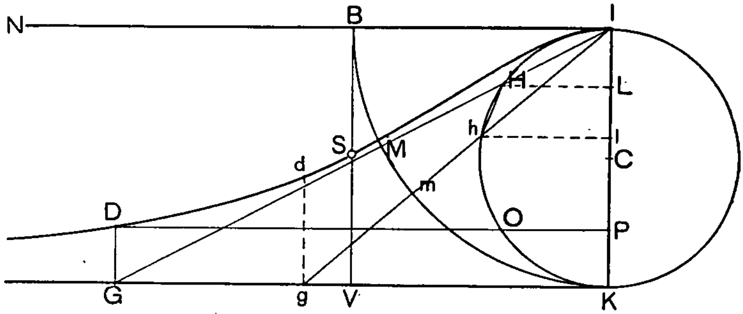



Fig. 11.

niet alleen aan, dat de oppervlakte van de figuur, die door $KI$, de kromme en de asymptoot begrensd wordt, gelijk is aan het dubbele van de oppervlakte van het cirkelquadrant $IBK$, om $I$ als middelpunt met straal $a$ beschreven (welk quadrant blijkbaar dezelfde oppervlakte heeft als de cirkel met middellijn $IK$), maar bovendien, dat de oppervlakte van elke strook $GDgd$, die door de kromme, de asymptoot en twee ordinaten wordt begrensd, gelijk is aan het dubbele van de oppervlakte van den sector, die in den cirkel $BK$ door de rechten, die $I$ met de voetpunten der twee ordinaten verbinden, wordt bepaald.

Ten bewijze hiervan beschouwt Grandi volgens de redeneergewoonte van zijn tijd twee oneindig naburige ordinaten $DG$ en $dg$, die een oppervlakte-element $DGdg$ bepalen, dat als rechthoek wordt opgevat. De lijnen $IG$ en $Ig$ bepalen op den cirkel met middellijn $IK$ een boog $Hh$, die als samenvallend met de koorde $Hh$ wordt beschouwd. Nu is in den rechthoekigen driehoek $IKG$, waarin $KH$ loodrecht op $IG$ staat,

$$GI \,.\, HI = KI^2 = gI \,.\, hI.$$

zoodat, in verband met de gelijkheid der hoeken $GIg$ en $hIH$, blijkt

$$\triangle\, IGg \backsim \triangle\, IhH$$

dus

$$Gg : hH = IG : Ih$$

of, daar $Ih$ van $IH$ oneindig weinig verschilt,

$$Gg : hH = IG : IH = IK : IL = IM : GD$$

Dus $$Gg \,.\, GD = IM \,.\, Hh$$

Nu is $$Hh = bg\, KH - bg\, Kh = bg\, KM - bg\, Km = bg\, Mm$$

dus $$Gg \,.\, GD = IM \,.\, bg\, Mm$$

of $$\text{Opp. } DGgd = 2 \text{ opp. sector } IMm$$

waaruit door optelling over aangrenzende strooken de meegedeelde stelling volgt.

§ 12. De afgeleide stelling wordt voor de tegenwoordige, meer met de symbolische methoden der differentiaal- en integraalrekening, dan met de meetkundige behandeling van krommen van hoogeren graad en meetkundige beschouwing van infinitesimale grootheden vertrouwde denkgewoonten, onmiddellijk doorzichtig, wanneer we de vergelijking van de kromme schrijven als

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} = a \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

en dit lezen als

$$y = a^2 \frac{d}{dx} \text{bg tg} \frac{x}{a}.$$

Immers nu is

$ydx = a^2\, d\, bg\, KM$ ($bg\, KM$ in boogmaat), wat aequivalent is met

$$DG \,.\, Gg = IM^2 \,.\, bg\, Mm = 2 \,.\, \text{sector } IMm.$$

De grond van den samenhang tusschen de quadraturen van de Versiera en van den cirkel ligt dus hierin, dat de Versiera de differentiaalkromme is van den boogtangens, wanneer men de middellijn van den cirkel als lengteeenheid kiest.

§ 13. Uit de in Prop. IV (§ 10) bewezen stelling worden door Grandi de volgende corollaria afgeleid:

1. Trekt men de ordinaat $VS$, die, verlengd, door $B$ gaat, dan is de oppervlakte, door deze ordinaat, de asymptoot en de kromme begrensd, gelijk aan de oppervlakte van het cirkelquadrant $IKB$.

2. Trekt men door een punt $D$ van de kromme $DP$ loodrecht op $IK$, dan is de oppervlakte van de figuur, begrensd door $DP$, $PI$ en de kromme gelijk aan het viervoud van de oppervlakte van het segment $KOH$[23]).

3. Men laat de figuur, begrensd door $IK$, de kromme en de asymptoot wentelen om $KG$. Het lijnstuk $DP$ beschrijft daarbij een cylindermantel, waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van de oppervlakten, die $OP$ resp. bij wenteling om $GK$ en om $IN$ doorloopt (wegens $KP \cdot GK = IL \cdot GK = LH \cdot IK = OP \cdot IK = OP\ (KP + IP)$). Volgens de methode der indivisibilia wordt nu de inhoud van het lichaam, dat door de vlakke figuur $IKG \infty DI$ bij wenteling om $KG$ beschreven wordt, beschouwd als de som der oppervlakten, die door de lijnstukken $DP$ doorloopen worden. Sommeert men nu weer al deze oppervlakten, dan blijkt de bedoelde inhoud gelijk te zijn aan de som der inhouden, die de halve cirkel $IHK$ opv. bij wenteling om $KG$ en om $IN$ beschrijft en dus gelijk aan den inhoud, dien de geheele cirkel met middellijn $IK$ bij wenteling om $KG$ doorloopt. Hierdoor is dus langs meetkundigen weg de waarde van den integraal

$$\int_0^\infty \pi y^2\, dx$$

voor de Versiera afgeleid. Deze levert voor

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

inderdaad de uitkomst $\frac{1}{4}\pi^2 a^3$, die den inhoud van den torus voorstelt, beschreven door den cirkel met diameter $IK$ bij wenteling om $KG$.

4. De juist berekende inhoud is volgens een stelling van Guldin ook gelijk aan het product van de oppervlakte der wentelende figuur en de lengte van den weg, dien haar zwaartepunt bij een wenteling doorloopt. Men vindt hieruit voor den afstand van dit zwaartepunt tot $KG$ de waarde $\frac{1}{4}a$.

§ 14. Grandi wil nu verder trachten den inhoud te berekenen van het lichaam, dat de figuur, begrensd door $IK$, de kromme en de asymptoot bij wenteling om $IK$ beschrijft. Om dit doel te bereiken, gaat hij als volgt te werk. Men heeft (fig. 11)

PROSPECTUS.

# COURS
DE
# MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

A L'USAGE DES ÉTUDIANTS EN SCIENCES NATURELLES

PAR

Gustave VERRIEST
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

---

PREMIÈRE PARTIE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS
DEUXIÈME ÉDITION

---

SECONDE PARTIE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS
CALCUL INTÉGRAL
DEUXIÈME ÉDITION

---

LOUVAIN
STANDAARD-BOEKHANDEL
87, Rue de Namur, 87.

GRONINGEN
N.V. ERVEN P. NOORDHOFF
12, O. Boteringestraat, 12

IMPRIMÉ EN BELGIQUE
1928

PRIJS PER DEEL F 5.00 GEBONDEN F 6.00

# TABLE DES MATIÈRES

(Première Partie)


CHAPITRE I
Les Limites

CHAPITRE II
Les Logarithmes

CHAPITRE III
Les Fonctions

CHAPITRE IV
Principes de Géométrie Analytique

CHAPITRE V
Premières Notions de Calcul Différentiel Derivée et Différentielle des Fonctions Explicites d'une seule variable

CHAPITRE VI
Applications des Dérivées Nouvelles Interprétations de la Dérivée et de la Différentielle

CHAPITRE VII
Propriétés de la Dérivée

CHAPITRE VIII
Dérivées et Différentielles Successives

CHAPITRE IX
Formule de Taylor — Formule de Maclaurin

CHAPITRE X
Vraie valeur des Expressions Indéterminées

CHAPITRE XI
Maxima et Minima d'une Fonction

CHAPITRE XII
Étude des Fonctions et constructions des Courbes

CHAPITRE XIII
Fonctions de plusieurs Variables
Fonctions Composées d'une seule variable

CHAPITRE XIV
La Différentielle Totale

CHAPITRE XV
Dérivées Partielles Successives
Fonctions d'un Nombre Quelconque de variables

CHAPITRE XVI
Différentiation des Équations
Différentiation des Fonctions Implicites

CHAPITRE XVII
Utilité de la Différentielle

CHAPITRE XVIII
Applications Géométriques du Calcul Différentiel

CHAPITRE XIX
Les sections Coniques
A. L'ellipse
B. Les changements d'axes des coordonnées
C. La parabole
D. L'hyperbole

CHAPITRE XX
Les Coordonnées Polaires

(SECONDE PARTIE)

CHAPITRE XXI
Principes de Géométrie Analytique a trois Dimensions les vecteurs, le Point, les Angles

CHAPITRE XXII
Le plan et la Droite

CHAPITRE XXIII
Les Courbes Gauches, les Surfaces

CHAPITRE XXIV
Les Intégrales Indéfinies

CHAPITRE XXV
Intégration des Fractions Rationnelles

CHAPITRE XXVI
Intégration des Fonctions Inationnelles Algébriques

CHAPITRE XXVII
Intégration des Fonctions Transcendantes.

CHAPITRE XXVIII
Les Intégrales Définies

CHAPITRE XXIX
Applications des Intégrales Définies

## CHAPITRE XXX
Calcul des Intégrales Définies par Approximation

## CHAPITRE XXXI
Valeur Moyenne d'une Fonction Diagrammes

## CHAPITRE XXXII
Intégrales Doubles, Intégrales Triples

## CHAPITRE XXXIII
Dérivation sous le Signe d'Intégration les Différentielles Totales Exactes

## CHAPITRE XXXIV
Les Intégrales Curvilignes

## CHAPITRE XXXV
l'Énergie Interne, l'Entropie

## CHAPITRE XXXVI
Le Potentiel

## CHAPITRE XXXVII
Les Equations Différentielles

## APPENDICE

$$GI^2 : IK^2 = GI : IH = a : IL$$

Bepaal nu een grootheid $LA$, die voldoet aan

$$a : IL = LA : a$$

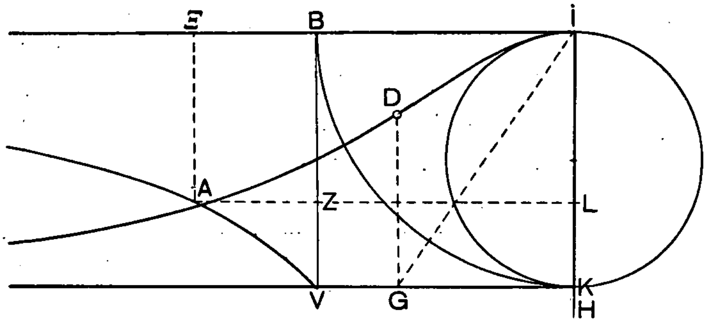



Fig. 12. [1])

en beschouw $LA = \xi$ en $IL = \eta$ als loopende coördinaten van een veranderlijk punt A ten opzichte van een coördinatenstelsel, waarvan de oorsprong in $I$ ligt, de $\Xi$-as langs de raaklijn in $I$ aan den cirkel en de $H$-as langs $IK$. Het punt $K$ beschrijft dan een orthogonale hyperbool, die haar asymptoten langs $\Xi$- en $H$-as heeft. Nu is

$$GI^2 : IK^2 = LA : a$$

dus separando, $\quad GK^2 : VK^2 = AZ : a$

dus

$$\frac{\text{Opp. van den cirkel met straal } DP}{\text{Opp. van den cirkel met straal } VK} = \frac{AZ}{a},$$

dus volgens de methode der indivisibilia

$$\frac{\text{Inh. van het lichaam, beschreven door } ID \infty GKI}{\text{Inh. van het lichaam, beschreven door } VBIK} = \frac{\text{Opp. } VA \infty B}{\text{Opp. } VBIK}.$$

Daar nu de oppervlakte van $VA \infty B$ oneindig groot is, is hetzelfde het geval met den gevraagden inhoud.

§ 15. De in de vorige paragraaf behandelde redeneering verdient om twee redenen de aandacht. Ten eerste om de uitvoering der transformatie, die de Versiera in een orthogonale hyperbool overvoert en die, omgekeerd, tot een nieuwe voortbrengingswijze

[1]) Men denke zich nog uit $D$ de loodlijn $DP$ op $IK$ neergelaten.

van de kromme moet voeren. Om haar algebraïsch te formuleeren, merken we op, dat

$$\frac{\xi}{a} = \frac{GI^2}{a^2} = \frac{a^2 + x^2}{a^2},$$

dus

$$\xi - a = \frac{x^2}{a}.$$

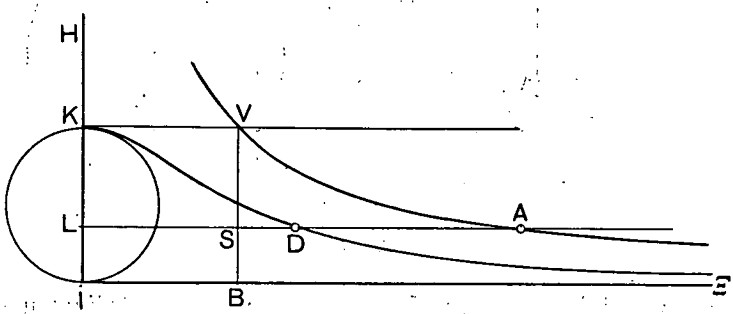



Fig. 13.

Tusschen de coördinaten van een punt $A$ $(\xi, \eta)$ van de orthogonale hyperbool ten opzichte van het assenstelsel $I\,\Xi H$ en de coördinaten van het correspondeerende punt $D$ $(x; y)$ van de Versiera ten opzichte van het assenstelsel $KXY$ bestaan dus de betrekkingen

$$\xi - a = \frac{x^2}{a} \quad \text{en} \quad \eta = y.$$

Denken we ons de versiera gespiegeld aan de lijn door het middelpunt van den cirkel evenwijdig aan de $X$-as getrokken, zoodat $K$ de top wordt, dan ontstaat de volgende voortbrengingswijze van de kromme: Zij $VA$ een orthogonale hyperbool

$$\xi\eta = a^2$$

$(IB = BV = a)$; bepaal bij elk punt $A$ van de hyperbool een punt $D$, zoodat $LD$ middenevenredig is tusschen $a$ en $SA$ (waarbij $S$ het snijpunt is van $VB$ met de lijn, door $A$ evenwijdig aan de $\Xi$-as). Het punt $D$ doorloopt dan de Versiera.

§ 16. In de tweede plaats is het merkwaardig om te zien, op welke wijze Grandi een resultaat bewijst, dat aequivalent is met de uitspraak, dat de integraal

$$\int_0^a x^2\,dy$$

die, op den factor $\pi$ na, den inhoud van het beschouwde omwentelingslichaam zou moeten voorstellen, divergent is. Deze integraal is wegens

$$x^2 = a^2 \frac{a-y}{y}$$

te schrijven als

$$a^2 \int_0^a \frac{a-y}{y} dy = a^3 \int_0^a \frac{dy}{y} - a^3,$$

waarbij de eerste term van het tweede lid logarithmisch divergeert. Grandi vindt hetzelfde resultaat, doordat hij, in de meetkundige beschouwingswijze van de logarithme als quadratuurfunctie van de orthogonale hyperbool, de verhouding van den te berekenen inhoud tot $a^3$ gelijk vindt aan die van de oppervlakte, ingesloten door de hyperbool, het lijnstuk $VA$, den asymptoot $IN$ en den ordinaat $BV$, tot $a^2$.

Aan het verkregen resultaat hecht Grandi groote waarde, omdat het hem als argument kan dienen in de controverse over de „spatia plusquam infinita" (meer dan oneindige oppervlakken), waarin hij met zijn werk *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus Disquisitio Geometrica* [24]) in het jaar 1710 deelnam. De strijd liep eigenlijk over de vraag, of er in het oneindig groote of kleine nog verschillende graden van oneindigheid bestaan, maar bij de behandeling daarvan kwamen ook allerlei andere oneindigheidsparadoxen ter sprake. Een van deze was de door Grandi in de voorrede van zijn werk *Problemata Vivianea* [25]) opgestelde bewering, dat er een figuur van eindige oppervlakte mogelijk is, die bij wenteling over een willekeurig kleinen hoek onmiddellijk een oneindig groot volume doet ontstaan. De gevonden eigenschap van de Versiera leverde hiervoor een voorbeeld.

§ 17. In het zesde corollarium der Prop. IV leidt Grandi nog een belangrijke eigenschap van den subtangens der Versiera af. Zooals in § 11 bewezen werd, geldt in fig. 14 de eigenschap

$$Gg : Hh = KI : IL.$$

Ook is, als we $Hh$ langs de raaklijn in $H$ denken

$$Hh : Ll = CH : HL.$$

Dus

$$Gg : Ll = \frac{KI}{IL} \cdot \frac{CH}{HL} = \frac{\frac{1}{2}KI^2}{IL \cdot HL}.$$

of

$$\frac{Gg}{dg-DG}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{IL\,.\,HL}.$$

Nu is de verhouding in het eerste lid (voor oneindig naburige ordinaten $GD$ en $gd$) gelijk aan de verhouding van den subtangens in $G$ tot de ordinaat, dus

$$\text{subtangens in } G=\frac{\frac{1}{2}a^2\,.\,DG}{IL\,.\,HL}=\frac{a^2}{2HL}.$$

Is nu $UV$ de raaklijn van den cirkel in $H$, dan is wegens de gelijkvormigheid der driehoeken $UVU_1$ en $HCL$

$$\frac{UV}{a}=\frac{\frac{1}{2}a}{HL},$$

zoodat de subtangens in $G$ gelijk blijkt te zijn aan het lijnstuk $UV$,

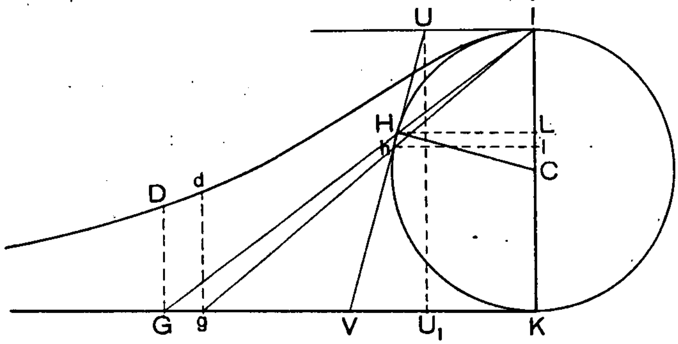



Fig. 14.

dat de raaklijnen in $I$ en $K$ van de raaklijn in het met $G$ correspondeerende punt $H$ van den cirkel afsnijden [25a]). Hieruit volgt een eenvoudige raaklijnconstructie voor een willekeurig punt van de Versiera; immers de subtangens is voor ieder punt bepaald en dus ook de raaklijn.

§ 18. In het tweede scholium van de boven behandelde propositie geeft Grandi nog een nieuw bewijs voor de in § 11 afgeleide stelling over de quadratuur van de kromme, waarin gebruik wordt gemaakt van beschouwingen uit de geometrische optica. Hij beschouwt nl. (zie fig. 11) het punt $I$ als een lichtend punt en vraagt

nu naar de Scala Intensionum (graphiek van de verlichtingssterkte) op de $X$-as. Daartoe merkt hij op, dat de verlichtingssterkte van een lijnelement van de $X$-as in een punt $G$ omgekeerd evenredig is met den afstand $GI = r$ en evenredig met den cosinus van hoek $DGI$, een uitspraak, die in het geval van een slechts tweedimensionale lichtuitbreiding de plaats inneemt van de photometrische grondwet voor verlichting in de ruimte (waar de verlichtingssterkte evenredig is met $\frac{\cos\varphi}{r^2}$). Men vindt dus, wanneer de lichtsterkte in $I$ $2\pi a^2$ eenheden bedraagt, voor de verlichtingssterkte in G

$$E = a^2 \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{a^3}{r^2} = \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

zoodat, wanneer men in ieder punt van de $X$-as de grootheid $E$ op de normaal uitzet, de Versiera als graphiek van de verlichtingssterkte ontstaat.

In fig. 11 moet nu de lichtstroom door $Mm$ gelijk zijn aan dien door $Gg$. Nu is de verlichtingssterkte op den cirkel $KB$ constant en voor te stellen door $IK = a$. Dus moet gelden

$$\text{Opp. } GDgd = Mm \,.\, a = 2 \,.\, \text{opp. sector } IMm$$

waaruit de quadratuureigenschap van de Versiera volgt.

De gehouden redeneering wordt hierna o.a. uitgebreid tot lichtuitbreiding in de ruimte. In de punten van het vlak, dat in $K$ aan den bol met diameter $IK$ raakt, heerscht een verlichtingssterkte

$$E = \frac{a^4}{r^3}$$

wanneer in $I$ een lichtsterkte $4\pi a^3$ bestaat en $r$ den afstand van het beschouwde punt tot $I$ voorstelt. Zet men weer overal $E$ op de normaal uit, dan ontstaat het oppervlak

$$z = \frac{a^4}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$

dat met het raakvlak in $K$ aan den bol een inhoud insluit, gelijk aan den lichtstroom door den halven bol ($KB$), d.i.

$$2\pi a^2 \,.\, a = 2\pi a^3.$$

§ 19. De Versiera komt in de werken van Grandi niet uitsluitend voor als object van mathematisch onderzoek. Hij gebruikt haar

ook als hulpmiddel voor de dynamische problemen, die hij in zijn commentaar op Galilei's werken [26]) aan de orde stelt. Hij wil daar onderzoeken [27]), hoe de valbeweging zou verloopen, wanneer de zwaarte niet constant was, maar op bepaalde wijzen afhankelijk van de in den val bereikte plaats. De vraag komt dus neer op het onderzoek van de beweging, die door een veranderlijke kracht aan een stoffelijk punt, dat oorspronkelijk in rust is, wordt meegedeeld. Bij dat onderzoek wordt, zooals dat in de Mechanica sedert Galilei algemeen gebruikelijk was geworden, een ruim gebruik gemaakt van graphische voorstellingen. Grandi heeft, om een beweging volkomen te kunnen beschrijven, zelfs vijf graphieken noodig: de kracht $K$ en de snelheid $v$ worden beide graphisch voorgesteld zoowel als functie van den weg $s$ als van den tijd $t$, terwijl verder de tijd wordt afgebeeld als functie van den weg [28]). De vijf graphieken dragen speciale namen, die telkens zoowel voor de verkregen kromme worden gebruikt als voor het ordinatenoppervlak, d.w.z. voor de figuur, begrensd door de kromme met twee harer ordinaten en de as der onafhankelijk veranderlijke. Het $K$-$s$ diagram heet de *scala delle forze* (kracht-schaal), het $v$-$s$-diagram *scala delle velocità* (snelheid-schaal), het $s$-$t$-diagram *scala dei tempi interi* (tijd-schaal), het $K$-$t$-diagram *piano delle forze* (krachtvlak), het $v$-$t$-diagram *piano delle velocità* (snelheidsvlak).

§ 20. Beperken we ons nu tot dat deel van het onderzoek, waarin de Versiera optreedt, dan moeten we vooreerst vermelden de propositie III, waarin wordt uitgesproken [29]), dat in een beweging uit rust de krachtschalen over twee wegen vanaf het uitgangspunt zich verhouden als de quadraten der eindsnelheden. Hierdoor wordt de eigenschap uitgedrukt, die wij weergeven door de stelling

$$\int_0^s K\,ds = \frac{1}{2}mv^2,$$

dus de wet van Levende Kracht en Arbeid.

Grandi beschouwt nu [30]) een beweging, waarbij op een stoffelijk punt een kracht werkt, die gericht is naar een vast centrum en waarvan de grootte omgekeerd evenredig is met het vierkant van den afstand tot dat centrum, een onderstelling, die natuurlijk sedert het verschijnen van Newton's *Principia* in het bijzonder de aandacht der mechanici in beslag nam. Bevindt zich nu het stoffe-

lijk punt, waarop de kracht werkt, aanvankelijk in rust in A en is T het krachtcentrum, dan is de krachtschaal een quadratische hyperbool GFH [31]) met asymptoten TX en TA, terwijl de snelheidsschaal

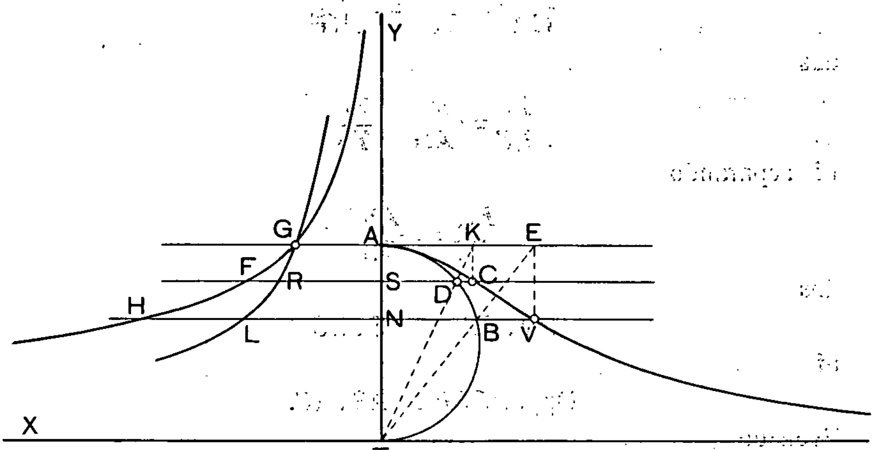



Fig. 15.

de Versiera wordt, die op de boven behandelde wijze uit den cirkel met middellijn AT wordt afgeleid. Om dit aan te toonen, bewijst Grandi, dat de quadraten van twee snelheden SC en NV zich verhouden als de correspondeerende oppervlakken *AGFS* en *AGHN* van de krachtschaal. Hiertoe wordt vooreerst opgemerkt

$$\frac{SC^2}{NV^2}=\frac{AK^2}{AE^2}=\frac{AK^2}{AT^2}\cdot\frac{AT^2}{AE^2}=\frac{SD^2}{TS^2}\cdot\frac{TN^2}{BN^2}=\frac{AS}{ST}\cdot\frac{TN}{AN}.$$

Het quadraat van de snelheid in zeker punt van de baan is dus recht evenredig met den doorloopen weg en omgekeerd evenredig met den afstand, die het bewegende punt nog van het krachtcentrum scheidt.

We bepalen nu anderzijds de verhouding van de oppervlakken *GAFS* en *AGHN*. *AGFS* is het verschil van de oppervlakken, die worden begrensd door de kromme, de asymptoot *TA* en resp. de ordinaten *AG* en *FS* en dus (volgens bekende stellingen over de quadratuur van hyperbolen) gelijk aan het verschil van de rechthoeken *AG* . *AT* en *FS* . *ST*. Zij nu *GRL* een Apollonische hyperbool door *G* met asymptoten *TA* en *TX,* dan is

$$AG\,.\,AT = RS\,.\,ST$$

dus

$$\text{Opp. } AGSF = AG \,.\, AT - FS \,.\, ST = FR \,.\, ST$$

Nu is

$$\frac{FS}{GA} = \frac{TA^2}{TS^2} = \frac{RS^2}{AG^2}$$

dus

$$\frac{FS}{RS} = \frac{RS}{AG} = \frac{TA}{TS}$$

of, separando

$$\frac{FR}{RS} = \frac{AS}{TS}$$

dus

$$FR \,.\, ST = AS \,.\, RS$$

of

$$\text{Opp. } AGSF = AS \,.\, RS.$$

Evenzoo

$$\text{Opp. } AGHN = AN \,.\, LN.$$

dus

$$\frac{\text{Opp. } AGFS}{\text{Opp. } AGHN} = \frac{AS}{AN} \cdot \frac{RS}{LN} = \frac{AS}{AN} \cdot \frac{TN}{TS}$$

dus

$$\frac{\text{Opp. } AGFS}{\text{Opp. } AGHN} = \frac{SC^2}{NV^2}.$$

Wat hier door meetkundige beschouwingen is afgeleid, is in moderne symbolen als volgt weer te geven. Zij $AS = s$, $TS = y$, $TA = a$, dan is

$$K = -\frac{c}{y^2}.$$

De vergelijking van de krachtschaal is dus

$xy^2 = c$, d.i. een quadratische hyperbool.

Nu is de oppervlakte van een segment van de krachtschaal tusschen $AG$ en de veranderlijke ordinaat $FS$

$$\int_y^a \frac{c}{y^2}\,dy = c\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{a}\right], \qquad (1)$$

dus is

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = c\,\frac{a-y}{ay}$$



JACOB STEINER 1796–1863

# P. NOORDHOFF

## TE GRONINGEN

*geeft uit de*

## WISKUNDIGE WERKEN VAN

*Prof. Dr. J. A. Barrau*
*Prof. Dr. H. Bremekamp*
*Prof. Dr. L. E. J. Brouwer*
*C. A. Cikot*
*Prof. Dr. J. G. v. d. Corput*
*P. van Geer*

z. o. z.

*Dr. B. Gonggrijp*
*N. L. W. A. Gravelaar*
*J. van de Griend*
*F. M. Jaeger*
*P. Jansen*
*Dr. J. Kors*
*Prof. Dr. J. C. Kapteyn*
*J. J. van Laar*
*C. L. Landré*
*Prof. G. Mannoury.*
*Dr. P. Molenbroek*
*H. Offerhaus Ezn.*
*Prof. Dr. Ch. H. van Os*
*A. J. van Pesch*
*Prof. Dr. Jul. Petersen*
*Dr. O. Postma*
*Prof. Dr. J. G. Rutgers*
*Dr. G. Schaake*
*Prof. Dr. G. Schouten*
*Dr. D. J. E. Schrek*
*Prof. Dr. Fred. Schuh*
*H. Siersma*
*Th. Stieltjes*
*Prof. Dr. M. J. van Uven*
*H. G. A. Verkaart*
*H. L. Vernhout*
*J. Versluys*
*Dr. W. L. van de Vooren*
*Prof. Dr. Hk. de Vries*
*W. H. Wisselink*
*Prof. Dr. R. Weitzenböck*
*D. B. Wisselink*
*P. Wijdenes*
*P. Wijdenes & Dr. D. de Lange*
*Prof. Dr. J. Wolff*
*Prof. Dr. W. van der Woude*

dus

$$|v| = \sqrt{\frac{2c}{ma^3}} \cdot a\sqrt{\frac{a-y}{y}},$$

van welke functie de Versiera de graphiek is, wanneer de eenheden zoo gekozen zijn, dat $\frac{2c}{ma^3} = 1$ is.

Het gebruik van de Apollonische hyperbool is als volgt toe te lichten. De toegepaste eigenschap van de quadratische hyperbool luidt in de integraalrekening

$$\int_y^\infty x\,dy = \int_y^\infty \frac{c}{y^2}\,dy = \frac{c}{y} = xy,$$

waaruit dadelijk volgt

$$\int_y^a x\,dy = xy - ax_0, \text{ wanneer } x_0 = AG = \frac{c}{a^2}.$$

Om nu in de meetkundige redeneering dat verschil in verband te brengen met de correspondeerende ordinaten van de snelheids-schaal, wil men den rechthoek $ax_0$ omvormen in een andere met zijde $y$; is de andere zijde dan $\xi$, dan heeft men de betrekking

$$\xi y = ax_0 = \frac{c}{a},$$

die de orthogonale hyperbool $GRL$ bepaalt. Het bedoelde verschil wordt nu

$$y(x - \xi) = \frac{c}{y} - \frac{c}{a},$$

welke uitkomst de integraalrekening onmiddellijk uit (1) kan aflezen. Bij de meetkundige behandeling der quadraturen treedt het integratieresultaat echter in den vorm van een rechthoek $xy$ op en dat geeft aanleiding tot de schijnbaar overbodige invoering van de Apollonische hyperbool.

§ 21. Men kan nu nog vragen naar de tijd-schaal, dus naar de graphische voorstelling van den tijd als functie van den weg [32]). Om die vraag te beantwoorden, merkt Grandi op, dat de ordinaten van de tijd-schaal omgekeerd evenredig zijn met die van de snelheid-schaal.

Is nu de Versiera $ACN$ de snelheid-schaal en spiegelt men deze kromme aan de horizontale rechte door het middelpunt van den cirkel, zoodat de versiera $TC_1N_1$ ontstaat, dan is, wanneer de

ordinaat $HC$ van de gegeven Versiera de nieuwe kromme in het spiegelbeeld $N_1$ van $N$ snijdt

$$HC^2 = a^2 \frac{AH}{TH}$$

en wegens $AH = ET$

$$EN^2 = a^2 \frac{AE}{ET},$$

dus

$$HC \cdot EN = a^2.$$

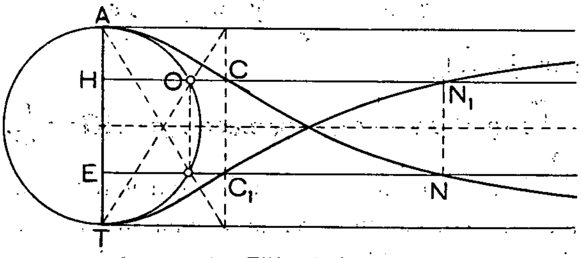



Fig. 16.

Bij geschikte keuze der eenheden kan dus de gespiegelde kromme als tijdschaal dienen. Hieruit volgt, dat de tijden over de twee wegen $AH$ en $AT$ zich verhouden als de correspondeerende ordinaat-oppervlakken van de Versiera $TN_1$, welke verhouding in verband

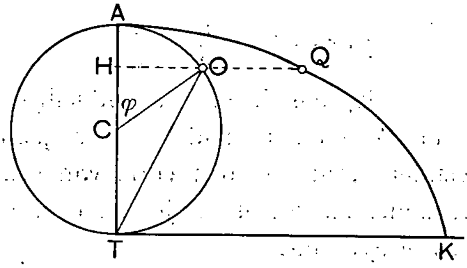



Fig. 17.

met een in § 13 bewezen stelling gelijk is aan de verhouding van de oppervlakte van de figuur, begrensd door de rechten $TA$ en $TO$ en den cirkelboog $AO$ tot die van den halven cirkel.

Hierdoor is dus in meetkundigen vorm het verband van den weg en den integraaltijd in de bestudeerde beweging afgeleid. Het is nu gemakkelijk, om ook voor dezen integraaltijd tot een graphiek te komen, waarbij de in ieder wegpunt sedert den aanvang ver-

streken tijd als ordinaat is uitgezet. Men heeft namelijk, wanneer $\angle ACO = Q$:

$$TOA = \tfrac{1}{2}r^2(\varphi + \sin\varphi),$$

zoodat de verhouding der tijden over $AH$ en $AT$ gelijk is aan

$$\frac{\varphi + \sin\varphi}{\pi}$$

d.i. de verhouding van de ordinaten $HQ$ en $TK$ in de cycloide, voortgebracht door het rollen van den cirkel $C$ over de rechte $TK$.

§ 22. Hoewel met het bovenstaande het eigenlijke doel van dit opstel bereikt kan worden geacht, lijkt het gewenscht, om ter afronding van het onderwerp, hier nog iets mee te deelen over een plaats in de nieuwere wiskundige literatuur, waar de Versiera weliswaar niet voorkomt, maar waar ze had moeten en kunnen voorkomen, wanneer ze intusschen niet was verwisseld met een andere, nauw met haar verwante kromme van den derden graad. Deze andere kromme, die haar volkomen schijnt te hebben verdrongen, wordt dan, hoewel ze bij Agnesi niet voorkomt, evenals een derde, die de Italiaansche mathematica evenmin gekend heeft, op haar naam gesteld.

De versiera kan namelijk worden voortgebracht door toepassing van een methode ter constructie van punten en raaklijnen van zekere krommen van den derden en den vierden graad, die in 1885 door den Amsterdamschen architect A. N. Godefroy is meegedeeld en die daarna bestudeerd is door P. H. Schoute [33]). De methode bestaat in de toepassing van een quadratische transformatie, die sindsdien als transformatie van Mac Laurin bekend staat, op een kromme, waarvoor een constructie van punten en raaklijnen bekend is. Het is voor het doel van dit opstel voldoende, indien we ons tot een bijzonder geval van die transformatie beperken en haar bovendien dan nog in een metrisch speciaal geval uitvoeren. Ter verduidelijking zullen we echter de benoodigde bijzondere transformatie eerst projectief formuleeren.

Laat dan gegeven zijn drie punten $A$, $B$, $C$, en een rechte $f$ in het vlak dezer drie punten door $A$ (hierin ligt het bijzondere karakter). Bij een willekeurig punt $P$ van het vlak wordt nu als volgt een ander punt $P'$ bepaald. Trek $CP$, bepaal het snijpunt $R$ van $CP$ en $f$. Trek $BR$ en $AP$, dan is het snijpunt dezer laatste twee lijnen het

punt $P'$. Het is duidelijk, dat hierdoor een quadratische transformatie is vastgelegd. Doorloopt nl. $P$ een rechte, dan zijn de waaiers $A\ (P)$ en $C\ (P)$ en evenzoo $C\ (P)$ en $B\ (P')$ perspectief, dus $A\ (P)$ en $B\ (R)$ projectief, dus doorloopt $P'$ een kegelsnede. De meetkundige beschouwing doet zien, dat $A$ en $C$ singuliere punten zijn, resp. correspondeerend met de rechten $AB$ en $AC$, terwijl voor de inverse transformatie $A$ en $B$ singulier zijn met $AC$, resp. $AB$ als correspondeerende rechten. Invariant voor de transformatie zijn de punten van $f$ en van $BC$. Ten opzichte van een coördinatendriehoek $XYZ \equiv ABC$, vindt men de transformatie in analytischen vorm

$$\begin{array}{lcl} \bar{x} = \mu xz & & x = \bar{x}\bar{y} \\ \bar{y} = y^2 & \text{of invers} & y = \mu \bar{y}\bar{z} \\ z = yz & & z = \mu \bar{z}^2 \end{array}$$

waarin $(x, y, z)$, de coördinaten van $P$, $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ die van $P'$ aanduiden, terwijl $f$ de vergelijking $y = \mu z$ heeft.

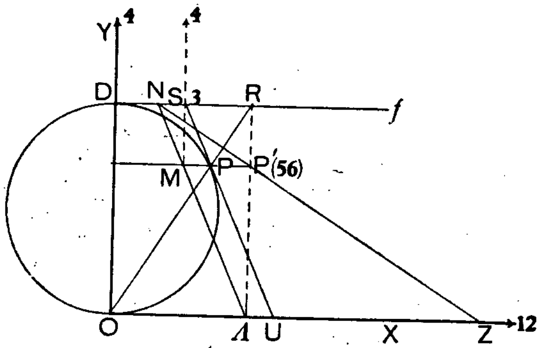



Fig. 18.

Het denkbeeld van de raaklijnconstructie van Godefroy is nu dit, dat als $P$ een kromme $S$ doorloopt, waarvan de raaklijn in een willekeurig punt te construeeren is, men mèt de kromme $S$ ook de raaklijn $l$ in $P$ transformeert; deze gaat daarbij over in een kegelsnede $K$, die door $A$ en $B$ gaat (als toppen van de projectieve waaiers) en bovendien door de punten, waarin $l$ de rechten $f$ en $BC$ snijdt (als invariante punten). De kegelsnede $K$ heeft bovendien in $A$ de raaklijn $AC$, wat dadelijk blijkt, doordat een willekeurige rechte

$$px + qy + rz = 0$$

wordt omgezet in de kegelsnede

$$p\bar{x}\bar{y} + q\mu\bar{y}\bar{z} + r\mu\bar{z}^2 = 0$$

die inderdaad in (1, 0, 0) de raaklijn $y=0$ heeft. Men kan dan echter de raaklijn van $K$ in $P$ met behulp van de stelling van Pascal construeeren en heeft dan meteen de raaklijn aan de getransformeerde kromme $C$ in $P'$ verkregen.

We specialiseeren nu deze constructie metrisch als volgt:

$S$ is een cirkel met middellijn $a$, die in $O$ aan de $X$-as van een rechthoekig coördinatenstelsel raakt. $C$ valt in $O$, $A$ en $B$ in de oneigenlijke punten van $X$- resp. $Y$-as. $f$ is de rechte $y=a$, die in $D$ aan den cirkel raakt.

De transformatie van Mac Laurin bestaat nu hierin, dat men door het snijpunt $R$ van $OP$ en $f$ een rechte evenwijdig aan de $Y$-as trekt en deze snijdt met een rechte door $P$ evenwijdig aan de $X$-as. Het resultaat is nu echter blijkbaar de Versiera volgens de in § 2 behandelde constructie.

Analytisch vindt men in niet-homogene coördinaten de transformatie-formules

$$x=\frac{\bar{x}\bar{y}}{a} \qquad y=\bar{y}$$

in overeenstemming met § 9.

Om nu tot de raaklijnconstructie te komen, beschouwen we de kegelsnede $K$, die door transformatie van de raaklijn $SU$, in $P$ aan den cirkel getrokken, ontstaat. Hiervan zijn bekend de punten (12) in $X\infty$ (oneigenlijk punt van de $X$-as met de $X$-as als raaklijn) (3) in $S$, (4) *in* $Y\infty$, (56) in $P'$. Men bepaalt nu $\Lambda$ als snijpunt van (12) en (45), $M$ als snijpunt van (34) en (61), vindt $N$ als snijpunt van $\Lambda M$ met (23) en hierna $NP$ als raaklijn.

Uit deze constructie is nu weer de in § 17 behandelde eigenschap van den subtangens af te leiden. Immers, als $NP'$, verlengd, de $X$-as snijdt in $Z$, heeft men

$$\frac{\Lambda Z}{MP'}=\frac{N\Lambda}{NM}=\frac{SU}{SP}.$$

Daar echter $MP'=SR=SP$, vindt men voor den subtangens

$$\Lambda Z=SU.$$

In de verhandeling van P. H. Schoute vindt men nu echter niet deze toepassing van de transformatie van Mac Laurin, maar een andere, waarbij $f$ door het middelpunt van den cirkel evenwijdig aan de $X$-as is getrokken. In de aanduiding van de aldus verkregen kromme als „kromme van Agnesi' [34]) ligt blijkbaar een der kiemen

van de sindsdien gebruikelijke verwarring[35]), waarop in het begin van deze paragraaf gezinspeeld werd.

Op de historische en wiskundige beteekenis van deze tweede kromme, die tegenwoordig, voorzoover de bedoelde verwisseling niet meer wordt begaan, wel als *pseudo-Versiera* wordt aangeduid,[36]) maar die beter den naam van *Quadratrix Geometrica* zou kunnen dragen, waaronder ze in de 17e eeuw voorkwam, zullen we in dit artikel niet ingaan, terwijl we tevens de derde aan Agnesi toegeschreven kromme, de Visiera[37]), onvermeld zullen laten[38]).

§ 23. Keeren we ten slotte nog even terug naar de aanleiding tot het schrijven van deze verhandeling! Zij lag in het feit, dat de Versiera, die eens een algemeen bekende kromme was, in den loop der tijden zoo volkomen in het vergeetboek was geraakt, dat zelfs haar naam tot een onbekende klank kon worden in de ooren van hedendaagsche beoefenaars der wiskunde. Dat feit is nu echter achteraf zoo verwonderlijk niet meer. De wiskunde gaat in haar tegenwoordigen rijkdom nu eenmaal wat achteloos om met veel, dat haar vroeger een bezit van waarde leek; en ze verliest in haar streven naar de algemeenheid wel eens de aandacht voor het interessante detail. Daarbij heeft zich haar toepassing op de natuurwetenschap in de 19e eeuw zoozeer ontwikkeld in abstract-symbolische richting, dat de geometrisch-aanschouwelijke methoden, die de 17e eeuw had ingevoerd en die in de 18e tot verderen bloei waren gebracht, nauwelijks meer doeltreffend moesten lijken. Waar Grandi het probleem van de beweging van een stoffelijk punt onder invloed van een centrale kracht, waarvan de grootte omgekeerd evenredig is met het vierkant van den afstand tot het centrum, nog als opgelost kon beschouwen door de snelheid en den tijd als functies van den weg graphisch voor te stellen, verlangde de nieuwere wiskunde de uitdrukkingen te kennen, die de functioneele relaties tusschen de optredende grootheden analytisch vastleggen.

In de laatste tientallen jaren herleven echter mèt het gebruik van de graphische methode de aandacht en de waardeering voor wat de grondleggers der mathematische natuurwetenschap met behulp van die methode hebben bereikt. En het is beginsel volkomen begrijpelijk, dat de Versiera, die we bij Grandi èn met optische èn met mechanische beschouwingen in verband zagen brengen, ook in moderne biologische onderzoekingen, hetzij ter veraanschouwelij-

king van bepaalde functioneele relaties, hetzij ter idealiseerende samenvatting van empirisch gevonden waarden, opnieuw beteekenis verwerft.

---

## NOTEN.

[1]) L. G. Baas Becking, *Wiskundige desiderata ten opzichte van het voorbereidend hooger onderwijs,* Euclides VIII (1932), p. 166 e.v., in het bijzonder p. 176.

[2]) F. Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches.* Obras sobre Mathematica. Vol. IV en V. Coimbra 1908.

[3]) Gino Loria, *Curve Piane Speciali Algebriche e trascendenti. Teoria e Storia.* 2 vol. Milano (Hoepli) 1930.

[4]) Maria Gaetana Agnesi (1718—1799) was de dochter van een hoogleeraar in de wiskunde te Milaan. Zij was een zeer vroegrijp kind, dat reeds vroeg geen vuriger wensch had, dan haar leven in een klooster door te brengen Haar familie verzette zich echter tegen haar intrede in een religieuse orde. Van haar 20e jaar af leefde zij thuis in volkomen afzondering en wijdde zich geheel aan de wiskunde. Van 1752 tot 1754 nam zij tijdens een ziekte van haar vader diens professoraat waar. Na zijn dood in 1754 werd zij directrice van het Hospice Trivulzio van de Blauwe Nonnen te Milaan. Haar voornaamste werk, dat in noot 5 vermeld wordt, is een in 1748 verschenen leerboek van Analytische Meetkunde en Infinitesimaalrekening in twee deelen, waarvan het eerste in 1755 in het Fransch werd vertaald, terwijl het geheele werk in 1801 in het Engelsch werd uitgegeven.

[5]) *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventu' Italiana* di D. Maria Gaetana Agnesi Milanese. Dell' Accademia delle Scienze di. Bologna. 2 Tomi. In Milano MDCCXLVIII. Nella Regia-Ducal Corte. U. B. Amsterdam.

[6]) loc. cit. I, 380.

[7]) Gino Loria, loc. cit. I, 94. Teixeira, loc. cit. IV, 108.

[8]) Fermat (Pierre de), de beroemde Fransche mathematicus, geb. te Beaumont de Lomagne, 20 Aug. 1601; † te Castres, 12 Jan. 1665.

[9]) Grandi (Guido), geb. Cremona, 7 Oct. 1671; † Pisa, 4 Juli 1742. Was lid van de orde der Camaldolensen, van 1700 af hoogleeraar te Pisa in philosophie en vanaf 1704 in wiskunde. Zijn werken worden vermeld in de noten 20, 24, 26.

[10]) We hebben dit artikel geraadpleegd in den herdruk in *Oeuvres de Fermat;* ed. Ch. Adam et P. Tannery. I (Parijs 1891), p. 255 seq.

[11]) Voor $m = n = 1$ spreekt men in de 17e eeuw speciaal van Apollonische hyperbool.

[12]) Voor $n = 1$, $m = 2$, heeft men de Apollonische parabool.

[13]) *Oeuvres* I, 271.

[14]) Er staat: solidum sub *CB* quadrato in *CA* et sub *FD* quadrato in *FC* et sub *NH* quadrato in *HF.* Er wordt dus blijkbaar eigenlijk gesproken van rechthoekige blokken, waarvan grondvlakken zijn de vierkanten, resp. op de zijden *CB, FD, NH,* beschreven en de hoogten resp. *AC; CF, FH.* Deze meetkundige terminologie is echter slechts conventioneel; de redeneering betreft in werkelijkheid de producten der lengten der aangegeven lijnstukken. De bedoeling is verder, dat de verschillende ordinaten *CB* etc. oneindig dicht bij elkaar liggen.

zoodat de hoogten *AC, CF, FH* de oneindig kleine differentialen $dx$ zijn (differentiaal hier opgevat in den historischen zin van het woord, niet in de actueele beteekenis).

[15]) Antoine de la Loubère (ook geschreven Laloubère, Lalouère of Lalouvère) S. J., 1600—1664, schreef over quadratuur van vlakke krommen en over de cycloide.

[16]) *Oeuvres* I, 280.

[17]) *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens,* X (1905) 364 seq.

[18]) ibidem, X, 370..

[19]) Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Opuscula Mathematica. Lausannae et Genevae 1744. I, 261.

[19a]) Blijkbaar kan de in § 5 behandelde kromme $b^2y^2 - y^4 = b^2x^2$ worden beschouwd als anti-hyperbolisme van een cirkel, d.w.z. als een kromme, waarvan de cirkel een hyperbolisme is.

[20]) *Quadratura Circuli et Hyperbolae per infinitas Hyperbolas, et Parabolas quadrabiles Geometricè exhibita, et demonstrata.* Editio altera auctior.... Auctore D. Guidone Grando. Pisis MDCCX. Ex Typographia Francisci Bindi. Ik heb dit werk in ons land niet kunnen opsporen. Het gebruikte exemplaar is afkomstig uit de Kon. Bibl. te Berlijn. Het bevat bovendien het in noot 24 te vermelden werk *De infinitis infinitorum....,* een *Epistola Geometrica ad D. Ascanum Lippi Aretinum* en een *Protasis ad Exceptiones Cl. Varignonii.*

[21]) In de oudere phasen der goniometrie wordt de sinus van een boog $\varphi$ gedefinieerd als de helft van de koorde van het dubbele van den boog. Het is dus een lijnstuk, geen verhouding. De straal van den cirkel heet *sinus totus;* wat wij den sinus noemen is de verhouding *sinus : sinus totus.* De *sinus versus* is de pijl van het segment, dat den verdubbelden boog tot boog heeft; de grootte daarvan is in de tegenwoordige notatie $R(1 - \cos\varphi)$.

[22]) Dat de naam Versiera inderdaad van Grandi afkomstig is, wordt aannemelijk gemaakt door zijn woorden in het werk geciteerd in noot 26, pag. 393; waar hij spreekt over een kromme, nata da seni versi, che da me suole chiamarsi la Versiera, in latino peró Versorio.

[23]) Immers Opp. $IDGKI = 2.$ sector $IMK = 4.$ sector $CHK$. Verder is Opp. $DGKP = PK \,.\, PD = IL \,.\, GK = LH \,.\, IK = 4. \triangle CHK$. Door aftrekking volgt het gestelde.

[24]) *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus Disquisitio Geometrica. In qua.... Plusquam Infinita spatia hyperbolica Wallisii.. vindicantur..* Auctore G. Guidone Grando Cremonensi.. Pisis MDCCV. Ex Typographia Francisci Bindi. U. B. Leiden.

[25]) Dit werk heb ik niet kunnen raadplegen. Grandi citeert de plaats zelf *Quadratura Circuli* pag. 10.

[25a]) De geheele afleiding wordt eenvoudiger, indien men dadelijk in het begin de verhouding $Hh : Ll$ vervangt door $UV : a$ en voor $Gg : Gl$ in de plaats zet subtangens: ordinaat.

[26]) *Opere di Galileo Galilei...* Nuova Edizione. Tomo Terzo. Firenze (Tartini) MDCCXVIII, pag. 383 seq. *Note al Trattato del Galileo del Moto naturali accelerato* del Padre Abate D. Guido Grandi....

[27]) loc. cit. p. 387.

[28]) Hierbij is dan echter sprake van den tijd over een wegelement in het beschouwde punt; het is m.a.w. niet de tijd, die aan de beweging tot aan dat punt is besteed (integraaltijd), maar de differentiaal $dt$, die als functie van $s$ wordt voorgesteld. Het ordinatenoppervlak (de eigenlijke scala) geeft dan den integraaltijd aan (vandaar de naam

*scala dei tempi interi*). Het is dus duidelijk, dat de ordinaten dezer scala omgekeerd evenredig zijn met die der snelheidsschaal.

[29]) loc. cit. pag. 391.

[30]) loc. cit. pag. 393.

[31]) d. w. z. een kromme $xy^2 = c$.

[32]) zie hierbij noot 28.

[33]) P. H. Schoute, *Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen*. Nieuw Archief voor Wiskunde, XII (1886) p. 1—37, idem, *Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes*. Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles XX (1886) p. 49—94.

[34]) loc. cit. p. 31; resp. p. 86.

[35]) Men treft de bedoelde verwisseling ook aan bij G. de Longchamps, *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*. Paris (Delagrave) 1890, p. 111.

[36]) Gino Loria, Loc. cit. (noot 3) p. 98.

[37]) G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. Torino (Bocca) 1887, p. 87.

[38]) Volledigheidshalve vermeld ik hier nog enkele verhandelingen van lateren datum, waarin de versiera voorkomt:

J. Booth, *A Treatise on some new geometrical methods*. Vol. I (London 1873), p. 302 seq. behandelt een meetkundig verband tusschen de ordinaten van een versiera, een cycloide en een logocyclische kromme met dezelfde asymtoot. Waarom hij de kromme "the witch" noemt, is mij onbekend.

J. Mister, *Propriétés de la courbe d'Agnesi*. Mathesis VII (1887) p. 5, vindt een soortgelijk verband tusschen een versiera, een cissoide en een cirkel. De bij hem voorkomende stelling over het volume van het lichaam, dat bij wenteling om de asymptoot ontstaat, was, zooals we zagen (§ 13) reeds aan Grandi bekend.

E. Janisch, *Die Versiera der Agnesi und verwandte Linien als Orthogonalprojektionen von Raumkurven dritter Ordnung* , Archiv für Math. u. Phys. (3) XII (1907), p. 117—123, vindt de kromme als verticale projectie van de doorsnede van een hyperbolische paraboloide een rechten cirkelcylinder (in speciale liggingen) en leidt daaruit een raaklijnconstructie af.

In andere verhandelingen, waarin de Versiera ter sprake komt, blijkt meestal de boven vermelde verwisseling met de Quadratix Geometrica begaan te zijn.

# HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abt. A. Quellen. Band II. The Mishnat Ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 C. E. And the Geometry of Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi, the first Arabic Geometry (c. 820), representing the Arabic version of the Mishnat Ha Middot. A new edition of the Hebrew and Arabic Texts with Introduction, Translation and Notes by Solomon Gandz.* Berlin, Julius Springer, 1932. R.M. 24.—.

In deze tweede publicatie van de afdeeling *Quellen* van het belangrijke en met wijden blik geredigeerde Duitsche tijdschrift voor geschiedenis der Wiskunde brengt S. Gandz den Hebreeuwschen tekst, voorzien van vertaling en uitvoerige noten, van het oudst bekende Hebreeuwsche werk over meetkunde, dateerend van c. 150 A. D. en geschreven door Rabbi Nehemiah. In een inleiding wordt het probleem besproken, dat gelegen is in het voorkomen in de literatuur van twee verschillende soorten van citaten uit het werk, waarvan de eene steeds betrekking heeft op de constructie en de afmetingen van den tabernakel, zooals men in een Midrash of Baraita (commentaren van passages uit den Bijbel) kan verwachten, terwijl de andere op een zuiver geometrisch werk schijnt te wijzen. De schrijver toont aan, dat de oude *Mishnat ha-Middot* inderdaad de beide soorten geciteerde passages bevat heeft, doordat ze een compendium van de geometrie gaf als inleiding tot de behandeling van den tabernakel. Het werkje bevat in vijf hoofdstukken 42 paragraphen en behandelt definities en berekeningsregels uit de vlakke en de ruimtelijke meetkunde; de behandeling is geheel op de practijk gericht; bewijzen worden niet gegeven. Door vergelijking van den tekst van de *Mishnat ha-Middot* met dien van de *Geometrie van* al-Khowārizmī (een hoofdstuk van zijn beroemde *Algebra*) kan worden aangetoond, dat het laatste werk

voornamelijk een bijna woordelijke vertaling van den ouden Hebreeuwschen tekst is. Dit is zeer belangwekkend voor de geschiedenis van de Arabische wiskunde. Het toont aan, dat hierin ook op geometrisch gebied nog andere invloeden werkzaam zijn geweest dan die der Grieken; er is zelfs aanleiding, om al-Khowārizmī te beschouwen als een bewusten tegenstander van de introductie van de Grieksche wiskunde in de Arabische cultuur. Verdere publicatie van bronnen over de voorgeschiedenis der Arabische wiskunde zal hierover wellicht nog meer licht verspreiden en in het bijzonder aantoonen, dat het proces der historische ontwikkeling van het wiskundig weten veel gecompliceerder is geweest dan de gebruikelijke opvolging: voor-Grieksch, Grieksch, Arabisch zou doen vermoeden.

*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abt. B. Studien. Band II, Heft 1—3.* Berlin, Julius Springer, 1931—32. R.M. 40.60.

Deze afleveringen bevatten weer tal van belangrijke bijdragen, vooral op het gebied der prae-Helleensche wiskunde. O. Neugebauer brengt het slot van zijn belangwekkende verhandeling *Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung,* waarin hij met behulp van een curieuse statistische methode de vraag beantwoordt, volgens welke methode de vermenigvuldigingstabellen der Babylonische wiskunde en de tafels voor reciproke waarden berekend zijn. Hij opent verder een nieuwe reeks van artikelen *Studien zur Geschichte der antiken Algebra,* waarvan het doel is, het bronnenmateriaal te verzamelen voor een geschiedenis van algebraische denkwijzen en methoden in de oudheid; ten deele in samenwerking met H. Waschow levert hij nieuwe bijdragen tot de kennis der Babylonische wiskunde. De zeer zorgvuldig bewerkte verhandelingen dragen weer in hooge mate bij tot de verheldering van ons inzicht in de nog zoo weinig bekende en, naar men reeds vermoeden kan, voor de geschiedenis der wiskunde zoo bij uitstek belangrijke Babylonische berekeningsmethoden Een minstens even groote beteekenis komt toe aan de Babylonische astronomie, die men in haar omvang en in haar invloed op de Grieksche cultuur ook eerst langzamerhand begint te kennen. K. Fotheringham levert tot die kennis een interessante bijdrage in *The indebtedness of Greek to Chaldaean Astronomy.*

Op het gebied der Grieksche wiskunde vindt men twee uitvoerige bijdragen op meer philosophisch en twee kleinere op mathematechnisch terrein. O. Becker behandelt in *Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen* nog eens het nog lang niet afdoend verhelderde probleem der ideaalgetallen van Plato, dat ook voor de geschiedenis der wijsbegeerte van essentieele beteekenis belooft te zullen worden. S. Luria stelt in *Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten* opnieuw het veelal wat vluchtig afgedane onderwerp der meetkundige atomistiek aan de orde, dat hem tot belangrijke conclusies voert aangaande de plaats der Eleatische paradoxen in de ontwikkeling der Grieksche wiskunde en aangaande het karakter van het wiskundig werk van den ook in geometrisch opzicht atomistischen Demokritos. C. Müller en O. Toeplitz behandelen opnieuw de nog steeds actueele vraag naar de wijze, waarop Archimedes de door hem in de *Dimensio Circuli* gebruikte rationale benaderingen van $\sqrt{3}$ kan hebben gevonden.

Op het gebied der Arabische wiskunde vindt men weer een bijdrage van E. Bessel—Hagen en O. Spiess (verheugend voorbeeld van samenwerking van een mathematicus en een arabist), nl. een uitgave met commentaar van een werkje van Tabit ben Qurra over een halfregelmatig veertienvlak. S. Gandz maakt kritische opmerkingen over hun vorige publicatie (*Das Buch über die Ausmessung der Kreisringe des Ahmad ibn Omar al-Karābīsi*, I, 502—540). Hij komt verder op tegen het kriterium ter vaststelling van den Griekschen oorsprong van Arabische geschriften, dat op voetspoor van Hultsch en Cantor aan de volgorde der in een geometrische figuur gebruikte letters (A, B, G, D enz.) pleegt te worden ontleend.

We vermelden ten slotte nog een verhandeling van P. L. van Hee over de Chineesche wiskunde: *Le classique de l'île maritime* en een artikel van C. L. Siegel, waarin de nagelaten aanteekeningen van Riemann over de $\zeta$-functie worden uitgewerkt.

*Hugo Dingler. Geschichte der Naturphilosophie.* Berlin, Junker und Dünnhaupt. 1933. VI en 174 blz. R.M. 8.

De productieve Duitsche philosoof en mathematicus schetst in dit zeer compact geschreven, daardoor de volle aandacht van den lezer vragende, maar dan ook sterk boeiende werk de principieele geschiedenis der natuurwetenschappen in hare relaties (of het ont-

breken daarvan) tot de theoretische philosophie vanaf primitieve en voor-Grieksche tijdvakken tot in onze dagen.

Voor een juist begrip van zijn veelal scherp kritische houding tegenover het dogmatisch empirisme der 19e eeuw en het computisme van onzen tijd (d.i. de opvatting, dat de taak der natuurwetenschap zou liggen in het construeeren van een mathematisch systeem, dat de afbeelding zou zijn van een ondersteelde metaphysische wettelijkheid in het natuurgebeuren), zal het noodig zijn om van een of meer van de andere werken kennis te nemen, die zijn vaardige pen in de laatste jaren heeft voortgebracht, in het bijzonder van zijn philosophische beschouwingen over het experiment (*Das Experiment, sein Wesen und seine Geschichte,* München 1928), waarin de naieve opvatting van het experiment als onbevangen vraag aan de natuur wordt bestreden en waarin de onmogelijkheid wordt betoogd, om langs experimenteelen weg het nietgeldig zijn van Euclidische meetkunde en Newtonsche mechanica aan te toonen. Daar de inhoud van dit geschrift hier bekend wordt ondersteld, zal de lezer, waarbij die onderstelling niet vervuld is, wel eens den indruk krijgen van uitsluitend afbrekende en niet voldoend gemotiveerde kritiek. Het zou zeer wenschelijk zijn, indien de schrijver zijn zeer origineele denkbeelden nog eens samenvattend behandelde in een werk, dat geen bekendheid met vroegere publicaties ondersteld. In verband met de zeer groote lijnen, waarin de geschiedenis van wiskunde en natuurwetenschappen noodzakelijk moesten worden geschetst, kan men volstrekte exactheid in de details nauwelijks verwachten. Voorzoover die exactheid te wenschen overlaat, wordt echter het principe van het betoog niet door dit gemis geschaad. Het boek kan aan ieder, die zich voor geschiedenis en philosophie van de natuurwetenschappen interesseert, sterk worden aanbevolen.

*W. C. Dampier Whetham. A history of science and its relations with philosophy and religion.* Cambridge, University Press, 1929. Second Edition.

De overgang van Dingler naar Dampier Whetham is eenigszins te vergelijken met dien van de studeer- naar de huiskamer. Ginds een sterk gecomprimeerd betoog met tal van onuitgesproken, maar niettemin essentieele vooronderstellingen; hier een uitvoerig, bevattelijk geschreven verhaal, dat weinig meer dan de algemeene ont-

wikkeling van den belangstellenden leek vereischt, om te kunnen worden gelezen en gewaardeerd. Wat beide werken gemeen hebben, is de zeer veel omvattende kennis van den schrijver. Want ook Dampier Whetham betrekt er de geheele natuurwetenschap in den wijdsten zin van het woord en in den ruimsten omvang van den tijd in. Dat ook bij hem de ontzaglijke uitgebreidheid van de stof wel eens de diepte van het betoog en de exactheid der mededeeling in den weg staat, is te begrijpen en tot op zekere hoogte zonder bezwaar te aanvaarden. Men leest dergelijke werken nu eenmaal niet, om zich over een enkel punt tot in finesses te laten inlichten, maar om den grooten blik op het geheel, dien men ervan verlangt. Dat verlangen nu vervult de schrijver, die ongetwijfeld een man van groote eruditie is, zoo goed, als men maar wenschen kan. Dat hij soms wat eenzijdig Engelsch is georienteerd en dus b.v. Leibniz ten opzichte van Newton verwaarloost (wat vooral bevreemdt, waar de samenhang tusschen wetenschap eenerzijds en philosophie en religie anderzijds bij niemand zoo in het oog springt als bij den schepper der monadenleer) is te betreuren, maar neemt niet weg, dat het boek met warmte kan worden aanbevolen aan ieder, die in de cultureele beteekenis der natuurwetenschappen belang stelt.

*Th. L. Heath, Greek Astronomy.* The Library of Greek Thought. Vol. X. London-Toronto. J. M. Dent & Sons. LV en 192 blz. 5 sh.

Heath, onbetwiste autoriteit inzake Grieksche wetenschap, geeft in dit mooi uitgevoerde, voor matigen prijs verkrijgbare werkje vertalingen van passages van klassieke schrijvers, die van belang zijn voor de kennis der oude astronomie. Op technisch-astronomische beschouwingen, instrumenten, metingen en berekeningen wordt daarbij niet ingegaan, zoodat het geheel ook voor niet mathematisch ontwikkelde lezers zeer bruikbaar is. Een uitvoerige *Introduction* geeft een volkomen heldere samenvatting van wat de teksten leeren. Men kan slechts betreuren, dat deze slechts in vertalingen worden gegeven; het ware geringe moeite geweest, ze daartegenover af te drukken.

*Heinrich Dörrie, Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur.* F. Hirt. Breslau. VII en 386 blz. Geh. R.M. 7. Geb. R.M. 9.

De schrijver verzamelt in dit werk honderd beroemde elementair-

mathematische problemen uit verschillende perioden van ontwikkeling der wiskunde, telkens voorzien van historische aanteekeningen en van een (in hedendaagsche symbolen weergegeven) oplossing. Het adjectief „elementair” moet men daarbij cum grano salis opvatten. Het beteekent eigenlijk alleen, dat kennis van de hoogere analyse niet wordt ondersteld. Of er lezers zullen bestaan, die die kennis missen en die niettemin voldoende geoefend zijn in den mathematischen betoogtrant, om al de gegeven bewijzen te kunnen volgen, is zeer de vraag. Voor wie die oefening wel bezit, zal de bestudeering van het werk een bron van genot en van leering kunnen zijn. Men vindt eerst 25 arithmetische problemen, beginnend met het Problema Bovinum, daarna verschillende vraagstukken uit de combinatierekening bevattend (o.a. het probleem van de 15 kostschoolmeisjes), reeksontwikkelingen (zonder kennis van de reeks van Taylor), vragen uit de waarschijnlijkheidsrekening en over getallentheorie en ten slotte de stellingen van Abel-Rufini en van Hermite-Lindemann. Hierop volgen 15 planimetrische opgaven vanaf de lijn van Euler en den cirkel van Feuerbach tot de onmogelijkheidsbewijzen van de constructie van de klassieke problemen der hoektrisectie en der kubusverdubbeling en tot de constructie van den regelmatigen zeventienhoek; dan 25 vraagstukken over kegelsneden en cycloiden, 10 stereometrische (o.a. de stelling van Pohlke-Schwarz, stereographische projectie en Mercatorprojectie), 13 nautische en astronomische (constructie van een zonnewijzer, schaduwkromme, eclipsvergelijking) en ten slotte 12 over extremen (bouw van de bijencel, kortste schemering, problemen van Steiner). Zooals men ziet, is de moeilijkheid der behandelde kwesties zeer uiteenloopend; daardoor zal het boek aan iederen beoefenaar der wiskunde iets van waarde kunnen geven. Men kan hopen, dat het den schrijver nog eens gegeven zal zijn, zijn verlangen, een omvangrijker werk van deze soort uit te geven, te verwezenlijken. De wiskunde gaat in haar snelle ontwikkeling wel eens wat erg achteloos met haar vondsten om; het is goed, dat er conserveerende invloeden bestaan, zooals de schrijver ze met dit werk uitoefent.

*Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind herausgegeben von Ernst Zermelo. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf*

*Fraenkel. Mit einem Bildnis.* Berlin, Julius Springer, 1932. VII en 486 blz. R.M. 48.

De bijzondere aard van de moderne methoden der mathematische publicatie — verhandelingen van betrekkelijk kleinen omvang, over verschillende tijdschriften verdeeld — maakt het gewoonlijk reeds korten tijd na de voltooiïng van een wetenschappelijken levensloop moeilijk, zoo niet onmogelijk, een overzicht te krijgen van het werk, dat daarin werd verricht. Daarom bestaat er geen voortreffelijker middel, een groot geleerde te eeren, dan de uitgave van een verzameling van al zijn verhandelingen, die aan de volgende geslachten zijn waarde vaak duidelijker kan toonen, dan de tijdgenooten haar hebben gezien. Kan om deze reden reeds ieder, die de herinnering aan de groote historische figuren der wetenschap gaarne levendig ziet houden en die het betreurt, wanneer hun scheppingen anoniem worden overgeleverd, het tot stand komen van dergelijke verzamelingen toejuichen, hoeveel te meer zal hij dan het initiatief moeten waardeeren, dat tot de boven aangekondigde uitgave van Cantor's verhandelingen door E. Zermelo heeft gevoerd. Cantor's werk toch vormt het in de geschiedenis der wiskunde vrij zeldzame geval, dat een geheel nieuwe tak van wetenschap van fundamenteele beteekenis wordt geschapen door een enkelen onderzoeker, zonder wegbereiders, zonder medewerkers, tegen de afkeurende critiek en de tegenwerking van de eersten der tijdgenooten in. Daardoor èn om den welhaast ongeëvenaarden invloed, dien zijn schepping op de ontwikkeling der geheele moderne wiskunde heeft uitgeoefend, is zijn figuur reeds thans, ruim 30 jaar na de voltooiïng van zijn wetenschappelijk werk en 15 na zijn dood, geworden tot een der klassieke gestalten van de geschiedenis der wiskunde; terwijl zijn denkbeelden nog voortdurend den groei der mathesis bevorderen, wekt zijn groote en tragische figuur reeds de belangstelling van den historicus.

De aantrekkelijkheid van de tot stand gebrachte verzameling wordt sterk verhoogd door de eenheid van gedachte en doel, die vrijwel alle verhandelingen samenbindt. Weliswaar is de opname van de artikelen over getallentheorie voornamelijk uit biographische overwegingen geschied, maar in de dan volgende groep van bijdragen tot de functietheorie ontwikkelen zich reeds de fundamenteele denkbeelden der verzamelingsleer, die dan in de groote derde

afdeeling *Abhandlungen zur Mengenlehre* hun rijke ontplooïïng vinden. Uit de nog ongepubliceerde briefwisseling met Dedekind zijn de passages opgenommen, die van belang zijn voor de kennis van de verzamelingsleer; zij betreffen voornamelijk de antinomieën, waartoe de beschouwing van de verzamelingen van alle orde-getallen en van alle Alephs voert; ook bevatten zij een tot dusver onbekend bewijs van Dedekind voor de aequivalentiestelling. De biographie, waarmee A. Fraenkel het werk besluit, vormt door den blik, dien zij op de ook menschelijk belangwekkende figuur van Cantor doet slaan, een belangrijke aanvulling van de publicatie van zijn werken.

*P. Barbarin, Pour le centenaire de la Géométrie non-Euclidienne.* Buenos Aires. Imprimerie et Editions Con 1931. 40 blz.

Korte schets van de voornaamste feiten aangaande het ontstaan en de verdere ontwikkeling der niet-Euclidische meetkunde, verlucht met portretten van Lobatschewsky, Wolfgang Bolyai e.a.

*K. G. Hagstroem, Les Préludes antiques de la Théorie des Probabilités.* Stockholm. C. E. Fritzes K. Hovbokhandel. 1932. 54 blz.

De Zweedsche actuaris, aan wiens intense historische belangstelling wij het mooie werkje *Sagan om de tio tecknen* danken, gaat in dit geschrift de sporen van de waarschijnlijkheidsrekening in de oudheid na. Hij vindt die in de passages, waarin Sextus Empiricus de gedachten van zijn meester Karneades samenvat, welke op hun beurt te beschouwen zijn als uitwerking van de denkbeelden, die Plato in den *Timaios* over waarheid en waarschijnlijkheid ontwikkelt. De rest van het werkje wordt ingenomen door een nauwkeurige studie van het klassieke astragalisme. Het aanhangsel bevat een aantal mooie illustraties.

*Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Texte établi et annoté par A. Rome. Pappus d'Alexandrie, Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste.* Roma. Bibliotheca Apostolica Vaticana 1931. LXX en 314 blz.

De commentaren, die Pappos en Theoon van Alexandria hebben geschreven op den *Almagest* van Ptolemaios zullen door den Leuvenschen hoogleeraar Rome in de reeks *Studi e Testi* van de Bibliotheca Vaticana worden uitgegeven. Verschenen is thans het eerste

deel, dat de uitleggingen bevat, die Pappos bij de boeken V en VI heeft gegeven, met noten, waar noodig, toegelicht, en voorafgegaan door een uitvoerige en duidelijke inleiding, die, hoewel in de eerste plaats voor philologen bestemd, ook door mathematisch ontwikkelde lezers met belangstelling en dankbaarheid zal worden geraadpleegd. De schrijver geeft hierin eerst een overzicht van de vroegere edities en vertalingen, waarin de commentaar op het vijfde boek (die op het zesde is nog niet eerder gedrukt) is verschenen; hij verschaft nieuwe inlichtingen over Pappos en slaagt er, met behulp van den Commentaar in, vast te stellen, dat hij dit werk kort na 320 moet hebben geschreven; en hij behandelt, na de gebruikelijke mededeelingen over de wijze van vaststelling van den tekst, uitvoerig en helder de manier, waarop men de vele astronomische tafels, die in den *Almagest* voorkomen en die men noodig heeft, om den gepubliceerden tekst te begrijpen, moet gebruiken. De voltooiïng van deze met even groote philologische als mathematische exactheid tot stand gebrachte editie zal door allen, die belangstellen in de klassieke astronomie, met vreugde worden begroet.

*Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences.* Tome XVII. La Haye. Martinus Nijhoff. 1932.

Opnieuw ligt er een deel van de onvolprezen Huygens-uitgave, waarvoor de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen den dank der wereld verdient, voor ons, het zeventiende in de lange rij, die in 1888 werd begonnen en waarvan het einde nog slechts vaag te zien is. De inhoud heeft nog steeds betrekking op de werkzaamheden vóór Huygens' vertrek naar Parijs in 1666: de onderzoekingen over slingeruurwerken in de tien jaren, die aan dat vertrek voorafgingen en die het vorige jaar in beperkte oplage apart zijn verschenen, vindt men hier definitief opgenomen; daarop volgen tot dusver onuitgegeven verhandelingen over mechanica en physica (o.a. onderzoekingen over de zwaarte, over het lenzenslijpen, pneumatische en optische experimenten). De rest van het deel wordt ingenomen door het geschrift *De Coronis et Parheliis,* waarin Huygens de verschijnselen van kringen om zon en maan en van nevenzonnen tracht te verklaren met behulp van beschouwingen over lichtbreking in waterdruppels en ijskorrels in de atmospheer.

# NOORDHOFF's WISKUNDIGE WERKEN EN SCHOOLUITGAVEN

**DE SCHRIJVERS** zorgen voor een degelijke inhoud op de hoogte van de tijd.
**DE UITGEVER** zorgt voor een onberispelijke uitvoering, typografisch, zoowel als voor papier en band.

---

De volgende werken zijn:

**Studieboeken** voor de acte Wiskunde L.O., tevens voor hen, die wat meer willen weten of moeten kennen dan de gewone H.B.S.-stof.

**Handleidingen** voor den aankomenden leeraar, die van de Lagere Wiskunde gewoonlijk niet meer heeft gezien, dan wat hij zelf op H.B.S. of Gymnasium heeft geleerd.

BOEKEN VOOR VOLWASSEN STUDEERENDEN.

**Lagere Algebra** door P. WIJDENES.
Deel I — 3de dr. — geb.; (nieuwe uitwerkingen ter perse) ƒ 5.50
Deel II — 2de „ — geb. . . . . . . . . . . . . ƒ 8.50
Antwoorden en uitwerkingen I ƒ 2.—; II ƒ 2.— (Aanvulling voor de 2e druk ƒ 0.40).

**Leerboek der Gonio- en Trigonometrie**
door P. WIJDENES. 4de druk — gebonden . . . . . ƒ 5.25
Antwoorden en uitwerkingen . . . . . . . . . . . ƒ 2.50

**Leerboek der Vlakke Meetkunde**
door Dr. P. MOLENBROEK. 7de dr. door P. Wijdenes. Geb. ƒ 6.50
Oplossingen . . . . . . . . . . . . . . . . . . ƒ 2 —

**Leerboek der Stereometrie**
door Dr. P. MOLENBROEK. 7de verb. dr., door P. WIJDENES.
Gebonden . . . . . . . . . . . . . . . . . . ƒ 5.—
Uitwerkingen, 2de druk . . . . . . . . . . . . ƒ 2.25

**Gids voor het examen Wiskunde L.O.**
door H. G. A. VERKAART. 3de verm. dr., 460 blz., 120 fig. Prijs ƒ 4.75
Gebonden . . . . . . . . . . . . . . . . . . ƒ 5.25

**Tafel H** — Groote tafel door J. VERSLUYS.
Prijs gebonden. Tweede druk . . . . . . . . . . ƒ 2.90
Onmisbaar is een abonnement op het

☛ **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde**
onder redactie van H. G. A. VERKAART en P. WIJDENES
Zes tweemaandelijksche afl. . . . . . . . . . . ƒ 6,—
Let op, hoeveel trouwe inzenders van de oplossingen men later onder de geslaagden ziet; ook voor K I.

---

**Gratis worden verkrijgbaar gesteld onze bijzondere catalogussen van de wis- en natuurkundige vakken:**
*Cat. A* met de titels van alle uitgaven
*Cat. B* van *schoolboeken*, met inhoudsopgave en mededeeling voor welke gebruikers geschikt
*Cat. C* van *studieboeken*, met inhoudsopgave
*Cat. D* van *leermiddelen:* kegels, prisma's, linialen, passers enz. enz.

---

☛ **De antwoorden en uitwerkingen, samen met de Gids en het N. T. v. Wiskunde, maken het mogelijk, dat men de acte Wiskunde L.O. kan behalen door zelfstudie.**
**„In geen geval late de candidaat zich wijs maken, dat hij eerst uit verouderde schoolboeken moet werken; wat hij daaruit verkeerd leert zal hem later leelijke parten spelen"; aldus de Heeren TOUSSAINT en VAN WEELE in het prosp. van hun schriftelijke cursus „DIE HAGHE".**

---

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

De bewerking getuigt weer van al de verdiensten van toewijding, nauwgezetheid, belezenheid en inzicht, die den redacteur, Dr. Vollgraff, sieren.

*Einleitung in die Altertumswissenschaft, herausgegeben von Alfred Gercke und Eduard Norden.* Band II, Heft 5. *Exakte Wissenschaften. Vierte Auflage; von A. Rehm und K. Vogel.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1933. 78 blz.

Het bekende compendium, dat met zijn uitvoerige literatuuropgaven zulk een beproefde gids is bij de studie der klassieke wetenschapsgeschiedenis, is door deze nieuwe uitgave weer geheel op de hoogte van den tijd gebracht. Het onderwerp wiskunde (met mechanica en optica) is bewerkt door den Münchenschen docent Kurt Vogel, dien men reeds uit verschillende publicaties als exact en belezen historicus heeft kunnen leeren kennen. Het geheele werk is uit den aard der zaak zeer gecondenseerd geschreven, maar niettemin aangenaam leesbaar.

*Per la storia e la filosofia delle Matematiche.* N. 10. *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.* Libro X. Traduzione di Maria Teresa Zapelloni. Note di Ruth Struik. Bologna. Nicola Zanichelli. 1932. 335 blz. L. 30.

De Italiaansche Euclides-uitgave, die onder leiding van F. Enriques door verschillende schrijvers tot stand wordt gebracht, is thans genaderd tot het befaamde Tiende Boek der Elementen, dat in vertaling van Maria Teresa Zapelloni en toegelicht door Ruth Struik een geheel deel der Serie vult. Daar er niet veel kans op is, dat deze editie in ons land veel zal worden gebruikt, moge hier worden volstaan met enkele opmerkingen. De vertaling is, voorzoover dat door steekproeven kan worden gewaarborgd, correct. In de noten wordt, naar het mij voorkomt, meer met de critica antica dan met de critica moderna rekening gehouden; de schrijfster is, dunkt mij, niet geheel op de hoogte met de hedendaagsche literatuur over haar onderwerp. Ter verduidelijking van het Euclidische betoog past zij een algebraische symboliek toe; dat vergemakkelijkt voor den modernen lezer weliswaar tot op zekere hoogte het volgen van het betoog, maar het belet hem meteen, in den geest van het werk door te dringen. Het schijnt mij bovendien toe, dat de gekozen wijze van uiteenzetting niet overal even doelmatig is;

men komt in het algemeen tot een betere formuleering, wanneer men de voorkomende grootheden alle consequent uitdrukt in een enkele rationaal lijnstuk met behulp van rationale getallen en wortels daaruit.

*W. E. van Wijk. De Gregoriaansche Kalender. Een technisch-tijdrekenkundige studie.* Gedrukt te Maastricht en uitgegeven voor rekening van den schrijver. 1932. X en 72 blz. *f* 4.—.

Voor dit zeer fraai uitgevoerde geschrift, dat een historische uiteenzetting van de Gregoriaansche kalenderhervorming bevat, moge hier de aandacht worden gevraagd van allen, die zich voor chronologie interesseeren of daarmee op een of andere wijze (b.v. in het onderwijs in kosmographie) te maken hebben. Zij zullen er een boeiend betoog in aantreffen, dat, mits ernstig bestudeerd (de materie leent zich niet erg tot een behandelingswijze, die het geheele probleem gemakkelijk en bevattelijk zou maken), het inzicht in de gecompliceerde kalendervraagstukken zeer zal kunnen bevorderen. De schrijver is tot de samenstelling van zijn werk niet in de laatste plaats gedreven door het tegenwoordig telkens weer opduikend streven, den Gregoriaanschen kalender af te schaffen; dat zou hem zeer ter harte gaan, daar hij de schepping van Lilius en Clavius bewondert om haar schoonheid en haar vernuft. Mocht die schepping onverhoopt toch nog eens worden verworpen, dan zal zijn werk, naar hij hoopt, nog waarde houden als gedenkteeken voor een imposante historische daad. Voor een meer uitvoerige behandeling van den inhoud van het geschrift van Dr. van Wijk moge verwezen worden naar een bespreking van mijn hand in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van Maart 1933.

*Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter.* Zweiter Band. Allgemeine Arithmetik. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin und Leipzig. W. de Gruyter & Co. IV, 266 blz. R.M. 12; geb. R.M. 13.20.

Ook het tweede deel van de nieuwe uitgave van Tropfke's vermaarde werk over de geschiedenis der elementaire wiskunde getuigt reeds uiterlijk, nl. door de stijging van het aantal bladzijden van 221 op 266, zonder dat nieuwe onderwerpen opgenomen zijn,

van de zorg, waarmee de schrijver zijn boek op de hoogte van het historisch-mathematisch onderzoek tracht te houden. De kennisname van de aangebrachte wijzigingen bevestigt dien indruk: men zie b.v. de, mede onder invloed van Wieleitner, gewijzigde passage over het ontstaan van het symbool $x$ voor de onbekende in een vergelijking en de daarop volgende aanvullingen over de geschiedenis van dit symbool; de meer uitvoerige beschouwingen over Egyptische wiskunde als gevolg van de meer intense bestudeering, die sedert den vorigen druk aan de Egyptische papyri ten deel is gevallen; de verbeteringen in de behandeling der z.g. exhaustie-methode, de veranderingen in de paragrafen over rationale en irrationale getallen en tal van andere plaatsen. Iets meer aandacht had hier en daar aan recente verhandelingen in het tijdschrift *Quellen und Studien* kunnen zijn gewijd. Aan het slot vindt men weer de voorloopig onmisbare concordantietabellen voor de nummering van bladzijden en noten in de 2e en 3e editie.

Bij allen, die in de geschiedenis der wiskunde belangstellen, leeft de hoop, dat binnen enkele jaren de nieuwe vorm, waarin Tropfke's levenswerk hier verschijnt, voltooid zal kunnen zijn.

# EEN MAXIMUM- EN MINIMUMVRAAGSTUK

DOOR

Dr. U. H. VAN WIJK.

Klein zegt op blz. 109 van zijn in samenwerking met Schimmack geschreven werk: [1])

„Ich bin überzeugt, wir müssen die Lehre von den Maxima und Minima durchaus mit ehrlicher Infinitesimalrechnung traktieren."

Deze raad is opgevolgd bij de uitwerking van het volgende probleem. Gevraagd onder de serie driehoeken, ingeschreven in een gegeven cirkel $M(R)$ en omgeschreven aan een anderen gegeven cirkel $I(x)$ de exemplaren te bepalen met maximalen en minimalen omtrek ($2s$). Ligt de tweede cirkel geheel binnen den eersten, dan zijn tegelijkertijd maximaal, opv. minimaal, de oppervlakte ($O = rs$), het product der zijden ($abc = 4\,RO$), de oppervlakte van den driehoek, gevormd door de middelpunten der aangeschreven cirkels ($O' = 2\,Rs$) en de oppervlakte van den driehoek, gevormd door de raakpunten van de zijden met den ingeschreven cirkel, nl. $\left(O'' = \dfrac{r^2 s}{2R}\right)$.

Nu is:
$$s = (s - a) + a = r \cot \tfrac{1}{2}\alpha + 2R \sin \alpha$$
$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{-r}{1 - \cos \alpha} + 2R \cos \alpha.$$

Voor het extreem krijgen we dus: $\cos \alpha = \dfrac{R \pm d}{2R} = \dfrac{r}{R \mp d}\ (d = MI)$.

We bepalen nu verder:

$$\frac{d^2 s}{d\alpha^2} = \frac{r \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} - 2R \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}\{r - 2R(1 - \cos \alpha)^2\} =$$
$$= p\left\{r - 2R\left(\frac{R \mp d}{2R}\right)^2\right\} = p(2r - R \pm d), \text{ waarin } p = \frac{\sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} > 0.$$

Nu is voor $d > 0 : 2r - R + d > 0$ en $2r - R - d < 0$, zoodat het bovenste teeken in vorenstaande formules ons het minimum en het onderste teeken het maximum levert.

[1]) Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen.

Is $2r - R \pm d = 0 = \frac{R^2 - d^2}{R} - (R \mp d)$, dan is $d = 0$ en $R = 2r$. Alle driehoeken der serie zijn gelijkzijdig.

Onmiddellijk kan met de formule $\cos\alpha = \frac{r}{R \mp d}$ geverifieerd worden, dat deze uitdrukking gelijk is aan de sinus van den halven tophoek der beide gelijkbeenige driehoeken, die tot de serie behooren. Het minimum geldt dus voor den gelijkbeenigen driehoek, waarvan de top een afstand $R-d$ tot het middelpunt van den ingeschreven cirkel heeft.

Dat er geen andere driehoeken dan deze gelijkbeenige tot de serie behooren, welke extremen omtrek hebben, kan a. v. aangetoond worden. Voor de extremen geldt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{R \mp d}{4R}} \text{ en } \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{3R \pm d}{4R}}, \text{ zoodat:}$$

$$s = r\cot\tfrac{1}{2}\beta + \frac{4R\cot\frac{1}{2}\beta}{\cot^2\frac{1}{2}\beta + 1} = r\sqrt{\frac{3R \pm d}{R \mp d}} + \sqrt{(3R \pm d)(R \mp d)}$$

of: $$r\cot^3\tfrac{1}{2}\beta - s\cot^2\tfrac{1}{2}\beta + (r + 4R)\cot\tfrac{1}{2}\beta - s = 0.$$

Hieruit volgt in de eerste plaats de bekende trigonometrische identiteit: $\Sigma\cot\frac{1}{2}\beta = \Pi\cot\frac{1}{2}\beta \left(= \frac{s}{r}\right)$.

Daar $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{3R \pm d}{R \mp d}}$, verkrijgen we:

$$\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{r}\sqrt{(3R \pm d)(R \mp d)}$$

en $$\cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{R + r \mp d}{r}$$

waaruit weer volgt: $\cot\frac{1}{2}\beta - \cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{d}{Rr}\sqrt{(3R \pm d)(R \mp d)}$.

Zoodat:

$$\cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{1}{R-d}\sqrt{(3R \pm d)(R \mp d)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{R+d}\sqrt{(3R \pm d)(R \mp d)}.$$

Zoowel voor het maximale als het minimale geval krijgen we dus uitsluitend een gelijkbeenigen driehoek: òf $\cot\frac{1}{2}\beta$ òf $\cot\frac{1}{2}\gamma$ is nl. gelijk aan $\cot\frac{1}{2}\alpha$.

Is $\alpha = 90°$, dan is: $s = r + 2R$. Omgekeerd moet de driehoek

noodzakelijk rechthoekig zijn, als deze betrekking geldt. Ze is nl. om te zetten in: $2(\Pi \cos \frac{1}{2}\alpha - \Pi \sin \frac{1}{2}\alpha) = 1$ en deze weer in: $\Pi(\cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha) = 0$.

Meetkundig is direct in te zien, dat er slechts dan een rechthoekige driehoek tot de serie kan behooren, als $d \geqq r$. Uit de formules blijkt het a. v.: Is $\alpha = 90°$, dan is:

$$\cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2R}{r} \text{ en } \cot \tfrac{1}{2}\beta \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2R + r}{r},$$

waaruit volgt:

$$(\cot \tfrac{1}{2}\beta - \cot \tfrac{1}{2}\gamma)^2 = \frac{4(R^2 - 2Rr - r^2)}{r^2} = \frac{4(d^2 - r^2)}{r^2} \geqq 0 \text{ of } d \geqq r.$$

In het geval, dat de driehoeken een gemeenschappelijken om- en *aan*geschreven cirkel met middelpunten M en $I_a$ hebben, kunnen we a. v. te werk gaan:

$$s^2 = r_a^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}\alpha = r_a^2 \operatorname{cosec}^2 \tfrac{1}{2}\alpha - r_a^2.$$

De omtrek bereikt dus een extreme waarde, als $r_a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha = AI_a$ extreem is. Meetkundig is nu dadelijk in te zien, dat de maximale waarde van $AI_a$ optreedt bij den gelijkbeenigen driehoek en de minimale waarde bij de ontaarde exemplaren der serie. (Zie daaromtrent de opmerking op blz. 251 van den 19den jaargang van het Nieuw tijdschrift voor Wiskunde).

De minimum waarde der oppervlakte nl. 0 treedt ook op bij de ontaarde driehoeken. De maximale waarde vinden we op de volgende wijze:

$$\frac{O}{r_a} = s - a = r_a \cot \tfrac{1}{2}\alpha - 2R \sin \alpha$$

$$\frac{d(s-a)}{d\alpha} = \frac{-r_a}{1 - \cos \alpha} - 2R \cos \alpha.$$

Dit gelijk nul gesteld levert:

$$\cos \alpha = \frac{R \pm d}{2R} = \frac{r_a}{d \mp R}.$$

Alleen het plusteeken komt in aanmerking, daar $d - R < r_a$ is; $\cos \alpha = \dfrac{r_a}{d + R}$ behoort bij de maximale oppervlakte (gelijkbeenige driehoek).

Gaan we thans over tot een serie vierhoeken met gemeenschappelijken om- en ingeschreven cirkel, dan wordt het cijferwerk belangrijk omvangrijker. In een vroeger opstel in het N. T. v. W. (19de jaargang blz. 249) hebben we afgeleid, dat het snijpunt der diagonalen van alle vierhoeken een vast punt S op de lijn MI is. De absolute waarde van de macht van dat punt t.o.v. den omgeschreven cirkel bedraagt:

$$m^2 = \frac{r^2(2R^2 + r^2 + r\sqrt{r^2 + 4R^2})}{2R^2}.$$

Noemen we de stukken, waarin de éene diagonaal door S verdeeld wordt, $p$ en $\frac{m^2}{p}$, die van de andere diagonaal $q$ en $\frac{m^2}{q}$, dan kan de stelling van Ptolemaeus geschreven worden in den vorm:

$$(p^2 + m^2)(q^2 + m^2) = p^2q^2s^2\left\{\frac{m^2}{(pq + m^2)^2} + \frac{1}{(p+q)^2}\right\}$$
$$(f(s, p, q) = 0).$$

Verder geldt:

$$s = r(\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta) = \frac{2r}{\sin \alpha} + \frac{2r}{\sin \beta},$$

waarin $\alpha$ en $\beta$ twee aanliggende hoeken van den vierhoek zijn.

De uitdrukking voor $s$ is te herleiden tot:

$$s = \varphi(p, q) = 4Rr\left(\frac{p}{m^2+p^2} + \frac{q}{m^2+q^2}\right).$$

Substitutie hiervan in $f(s, p, q) = 0$ levert ons de bijconditie

$$64p^3q^3R^2r^2m^2 + 16p^2q^2R^2r^2(p^2 + m^2)(q^2 + m^2) -$$
$$- (p^2 + m^2)^3(q^2 + m^2)^3 = 0 = f(p, q).$$

Uit: $\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}$ volgt nu na wat gecijfer:

$$(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)(p - q)(m^2 + pq)\{(m^2+p^2)(m^2+q^2)+6pqm^2\} = 0.$$

Extreme waarden kunnen dus optreden, als $m = p$ $(m = q)$ en $p = q$. Het eerste is het geval bij de vliegerfiguur van de serie, het tweede bij het gelijkbeenig trapezium, terwijl dit tevens de eenigste gevallen zijn, waarin aan één dier voorwaarden is voldaan.

Zonder verder te differentieeren is nu langs den volgenden weg in te zien, dat de vliegerfiguur de vierhoek met maximalen omtrek (oppervlakte), het gelijkbeenig trapezium die met minimalen omtrek der serie is.

De halve omtrek $s_1$ van de vliegerfiguur is nl. gelijk aan $r+\sqrt{r^2+4R^2}$, die van het trapezium

$s_2=2\sqrt{-2r^2+2r\sqrt{r^2+4R^2}}$.

$$s_1^2-s_2^2=10r^2+4R^2-6r\sqrt{r^2+4R^2}\geqq 0,$$

want:

$$(10r^2+4R^2)^2-36r^2(r^2+4R^2)=16(R^2-2r^2)^2\geqq 0.$$

Is $R=r\sqrt{2}$, dan is $s_1=s_2=4r$. De serie bestaat uit louter vierkanten.

Het onderzoek naar de vierhoeken met extremen omtrek en oppervlakte eener serie met gemeenschappelijken om- en *aan*geschreven cirkel zal ongetwijfeld leiden tot de bijzondere exemplaren dezer serie, t. w. de vliegerfiguur en de ontaarde vierhoeken. Wij zullen volstaan met de opmerking, dat de absolute waarde van de macht van het vaste snijpunt der diagonalen t.o.v. den omgeschreven cirkel in dat geval gelijk is aan:

$$m^2=\frac{r'^2(2R^2+r'^2-r'\sqrt{r'^2+4R^2})}{2R^2}.$$

We komen voorts nog even terug op de uitlating van Klein, aan het begin van dit opstel vermeld. Verdient het werkelijk wel aanbeveling maximum- en minimumproblemen „durchaus mit ehrlicher Infinitesimalrechnung" te behandelen? Wanneer we b. v. het onderhavige probleem eens zouden willen uitwerken voor veelhoeken met een aantal zijden $>4$ zou dit zeker niet eenvoudig gaan. We zouden verlangend uitzien naar een beknopte meetkundige behandeling in den geest, zooals Schwarz ze voor een ander probleem gegeven heeft. (Zie b.v. R. Sturm: „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie" blz. 89—90 en de bijdrage van L. v. Schrutka, in „Mathematische Abhandlungen, Herman Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern").

---

# EUCLIDES

## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

9e JAARGANG 1932/33

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

## Inhoud van de negende jaargang.

Blz.

Artikelen.

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, In cauda venenum . . . . . . . 1
Dr. H. J. E. BETH, De denkmoeilijkheden, gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen . . . . 11
SREMMA, Een droom . . . . . . . . . . . . . . . 23
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Historische revue . . . . . 28, 266
P. WIJDENES, De gelijkzijdige driehoek van Morley . . . . 40
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Descartes als wiskundige . . . . 57
J. H. SCHOGT, Meetkunde voor M. U. L. O. . . . . . . . 77
P. WIJDENES, De cyclometrische vormen . . . . . . . . 80
Verslag Staatsexamen 1931 . . . . . . . . . . . . . 91
Ir. D. J. KRUYTBOSCH, De bewijsmethode der volledige inductie 95
Dr. D. VAN DANTZIG, Over de elementen van het wiskundig denken . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
Dr. B. P. HAALMEIJER, Eenige opmerkingen naar aanleiding van het artikel van den heer Beth . . . . . . . . . . 117
M. J. DE LANGE, Meetkundig bewijs van een stelling betreffende de zwaartelijn . . . . . . . . . . . . . . 120
J. H. SCHOGT, Een paar moeilijke algebra-vraagstukken . . 123
P. WIJDENES, De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ . . . . 129
Dr. J. C. H. GERRETSEN, Over een elementaire afleiding van de wet van Newton uit de wetten van Kepler . . . . . 133
Dr. U. H. VAN WIJK, De behandeling van problemen van infinitesimalen aard . . . . . . . . . . . . . . 145
Prof. Dr. J. WOLFF, Oppervlakten en inhouden . . . . . 154
Uitslag van de enquête over een eindexamenvraagstuk . . . 165
Verslag Staatsexamen 1932 . . . . . . . . . . . 168
Prof. Dr. L. E. J. BROUWER, Willen, weten, spreken . . . . 177
Prof. D. J. VAN ROOY, Die funksiebegrip en die grafiese voorstelling . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 194
Prof. Dr. WILHELM LOREY, Didaktische und historische Bemerkungen über eine von Gausz zum numerischen Rechnen benutzte Identität . . . . . . . . . . . . . . 198
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Vragen van het mondeling staatsexamen 1932 . . . . . . . . . . . . . . . . 217
Dr. U. H. VAN WIJK, Een maximum- en minimumvraagstuk . 278

Blz.

Boekbesprekingen.

O. CHISINI, Lezioni di Geometria Analitica . . . . . . . . 39
REINDERSMA en VAN LOHUIZEN, Nieuw Leerboek der Natuurkunde III . . . . . . . . . . . . . . . . 39
H. J. E. BETH, Newton's Principia . . . . . . . . . . 89
WIJDENES en VAN DE VLIET, Logarithmen-, rente- en discontotafels . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
W. J. VOLLEWENS, Repetitie-dictaat beschrijvende meetkunde 90
H. J. E. BETH, Leerboek der Cosmografie . . . . . . . . 139
D. F. DU TOIT MALHERBE, Vakwoordeboek Engels-Afrikaans en Afrikaans-Engels . . . . . . . . . . . . . . 142
O. DONKER, Handleiding No. 1, Analyse . . . . . . . . 174
Woordenlijst van de Nederlandsche wiskundige vaktaal . . 174
Noordhoff's schooltafel . . . . . . . . . . . . . . 175
P. WIJDENES, Algebraische vraagstukken I . . . . . . . . 176
P. WIJDENES, Lagere Algebra I . . . . . . . . . . . 176
BETH en VAN LOO, Mechanica voor het M. O. . . . . . . . 212
MOLENBROEK en WIJDENES, Vlakke driehoeksmeting . . . 213
F. SCHUH, Mechanica-vraagstukken van kantelen en uitglijden 213
P. WIJDENES, Functies en grafieken . . . . . . . . . . 214
W. J. VOLLEWENS, Repetitie-dictaat Analyse I . . . . . . 216
Enciclopedia delle Matematiche elementari I . . . . . . . 283
A. GOTTSCHALK, Der Aufbau der Geometrie und der Arbeitsunterricht . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284
J. G. RUTGERS, Leerboek der beschrijvende meetkunde . . . 284

Ingekomen boeken . . . . . 27, 144, 176, 211

Portretten van de Professoren Schaake en Koksma.

## BOEKBESPREKINGEN.

*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* a cura di L. Bezzolari, G. Vivanti e D. Gigli. Milano (U, Hoepli) 1930. Volume I. Parte I, XVI en 450 blz. Lire 68. Parte II, XVI en 609 blz. Lire 82.

Het doel en de inrichting van deze nieuwe Italiaansche Encyclopaedie der Elementaire Wiskunde, waarvan na jarenlange voorbereiding het uit twee stukken bestaande eerste deel verschenen is, worden het best omschreven door de volgende woorden uit het programma der uitgave, dat in 1909 door een daartoe ingestelde commissie aan het congres te Padova werd aangeboden.

*Doel:* aan de leeraren in wiskunde en aan de leerlingen der universitaire inrichtingen tot opleiding voor het leeraarsambt een volledig beeld der Elementaire Wiskunde te geven, niet alleen met de bedoeling, om aan hem, die nauwkeurige en betrouwbare inlichtingen over eenig elementair onderwerp verlangt, tijd en moeite te besparen, maar vooral met het oogmerk, de beoefening der wiskunde te bevorderen onder hen, die, niet het voorrecht genietend in een universitair centrum woonachtig te zijn, zich niet gemakkelijk studiemateriaal kunnen verschaffen en moeilijkheden ondervinden bij het uitbreiden van hun eigen kennis en het nuttig gebruik van hun persoonlijke activiteit.

*Inrichting:* Bij elk onderwerp worden systematisch de meest belangrijke stellingen, die daarop betrekking hebben, vermeld en bij elke theorie worden de verschillende wijzen aangegeven, waarop men er een logischen en volledigen opbouw van kan geven. Van de fundamentele proposities, in het bijzonder voorzoover ze moeilijkheden van begrip of uitwerking bevatten, worden korte bewijzen gegeven; van de andere alleen de formuleering, vergezeld van uitvoerige historische en bibliographische citaten, die het den belangstellende gemakkelijk maken, de werken op te sporen, die een meer uitvoerige behandeling geven.

Het eerste stuk van Deel I bevat de onderwerpen: Logica, Theoretische en practische rekenkunde, Getallentheorie en onbepaalde analyse, Logarithmen, Mathematische machines. Het tweede stuk: Combinatierekening, Determinanten, Groepentheorie, Lineaire vergelijkingen en substituties, Lineaire, bilineaire en quadratische vormen, Rationale functies van een of meer variabelen, Algebraïsche vergelijkingen, Problemen van den tweeden graad en hooger. Limieten, Reeksen, Kettingbreuken en Oneindige producten. Beginselen der Infinitesimaalrekening. Verzamelingen in verband met elementaire wiskunde, Analytische functies van elementair standpunt uit.

Het werk maakt een zeer volledigen en betrouwbaren indruk en het getuigt op treffende wijze van het hooge peil, waarop de beoefening der wiskunde in het klassieke land van kunst en wetenschap staat. Het tweede deel zal aan de meetkunde gewijd zijn, het derde aan toegepaste wiskunde, didactiek en geschiedenis. Voltooid, zal het een

kostelijk bezit voor iederen mathematicus vormen, waarom wij de Italianen zullen kunnen benijden.

E. J. Dijksterhuis.

Dr.. Adolf Gottschalk, Der Aufbau der Geometrie und der Arbeitsunterricht. Siegen in Westf., Vorländer, 1933. 57 bladz., RM. 4.

Dit werk is geschreven voor de Duitsche leeraren, en staat in nauw verband met de in Duitschland gebruikelijke manier van meetkunde-onderwijs. De schrijver is een beslist tegenstander van de Euclidische methode en zulks niet alleen voor den voorbereidenden cursus, maar ook voor den systematischen. Hij meent, dat het aanleeren, begrijpen en verwerken van de meetkunde veel gemakkelijker en beter geschiedt, als men niet, zooals Euclides doet, van den driehoek uitgaat, maar van het vierkant en den cirkel. Het boekje heeft nu ten doel, te laten zien, hoe men van deze figuren uitgaande, de meetkunde kan opbouwen. Dit geschiedt in eene zeer korte en beknopte uiteenzetting, die voor een buitenlander niet overal even gemakkelijk te volgen is, vooral omdat in Duitschland en daarbuiten volstrekt niet steeds hetzelfde „üblich" is.

Het merkwaardige van het boekje van den heer Gottschalk is, dat het vele dingen behandelt, die ook heel goed passen in een Euclidischen leergang, zoodat ook de leeraar, die er niet aan denkt, den weg van Euclides te verlaten, er allerlei zeer lezenswaardigs in aantreft. De paragraphen over vierhoeken, bijvoorbeeld, die geenszins in strijd zijn met den Euclidischen opbouw, geven een veel ruimeren kijk dan het hoofdstukje „cirkel en vierhoek" van de meest gebruikte Nederlandsche schoolboeken. (Naar de schrijver zegt zijn ook de Duitsche schoolboeken op dit punt zeer onvolledig).

Allen, die niet gaarne slaafs een leerboek volgen, maar hun onderwijs wenschen te verlevendigen met elementaire vruchten van eigen nadenken, kunnen in het boekje van den heer Gottschalk aanleiding en aansporing tot onderzoek vinden. Als zoodanig is het trouwens óók bedoeld.

J. H. S.

Prof. Dr. J. G. Rutgers, Leerboek der Beschrijvende Meetkunde. Eerste deel, eerste stuk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1933. 108 bladz., *f* 1.75.

Dit eerste gedeelte van een uitvoeriger werk over beschrijvende meetkunde, ten dienste van studeerenden voor de acte M. O. Hand- en Rechtlijnig Teekenen, bevat uitsluitend rechthoekige projectie, en daarvan juist zooveel, als op de hoogere burgerschool onderwezen wordt. Het is dus, wat de behandelde onderwerpen betreft, bruikbaar als leerboek voor deze scholen. Wat den aard der behandeling betreft, zal het dat zeker ook blijken, wegens de fraaie en duidelijke figuren, en de volledige en duidelijke, niet al te beknopte uiteenzetting.

J. H. S.

Ter perse:

WIJDENES en DE LANGE

**REKENBOEK VOOR DE H.B.S. II**

10e druk

---

WIJDENES

**BEKNOPTE STEREOMETRIE**

3e druk

**LOGARITHMEN EN RENTETAFELS B**

9e druk

---

Verschenen:

**ANTWOORDEN** op de rekenvraagstukjes uit Wijdenes PLANIMETRIE

Prijs . . . . . . . . . . . . . . . . . *f* 1.—

**ANTWOORDEN** op de Vraagstukken uit Molenbroek-Wijdenes VLAKKE DRIEHOEKSMETING. — Prijs . . . . . *f* 1.50.

Beide gratis voor Docenten, die de boeken met hun klas gebruiken

---

Verschenen:

**LEERBOEK DER NATUURKUNDE**

voor de Kweekscholen door Ir. E. S. LEVISON en Ir. E. D. G. FRAHM. Deel I *f* 1.85. Deel II ter perse.

---

Zoo juist verscheen:

**THERMOSTATICA**

door Prof. Dr. J. E. VERSCHAFFELT.

---

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

# Wis- en Natuurkunde

## Geen school, geen studie of Noordhoff heeft er boeken voor van de beste auteurs

Vraagt de cat. A, B en C, waarin u alle mogelijke inlichtingen vindt
De cat. voor wis- en natuurkunde-uitgaven van P. Noordhoff vermeldt:

| | | |
|---|---|---|
| 14 | titels | Differentiaal- en Integraalrekening |
| 17 | „ | Analytische meetkunde |
| 36 | „ | Algebra |
| 34 | „ | Rekenkunde |
| 11 | „ | Handelsrekenen |
| 27 | „ | Meetkunde |
| 15 | „ | Stereometrie |
| 14 | „ | Driehoeksmeting |
| 18 | „ | Beschrijvende meetkunde |
| 11 | „ | Diversen |
| 19 | „ | Proefschriften |
| 17 | „ | Redevoeringen |
| 6 | „ | Philosophie der Wiskunde |
| 16 | „ | Examenuitgaven |
| 9 | „ | Logarithmentafels (21 tafels) |
| 3 | „ | Natuurkundige Bibliotheek |
| 4 | „ | Historische Bibliotheek |
| 3 | „ | Geschiedenis der Wiskunde |
| 20 | „ | Natuur- en werktuigkunde |
| 4 | „ | Tijdschriften (N. T. v. Wisk., Euclides, Chr. Huygens, Nieuw archief v. wiskunde) |

Vele dezer titels omvatten twee, drie of vier werken

## Gratis en franco wordt op aanvrage gezonden:

Catalogus A - bevattende de titels en prijzen van alle uitgaven voor wis- en natuurkunde.

Catalogus B - van schoolboeken, met volledige inhoudsopgaven en voor welke school of studie geschikt.

Catalogus C - idem van studieboeken.

Catalogus D - bevat de bij Noordhoff verkrijgbare leermiddelen, b.v. veelvlakken - kegels - cylinders - bollen - gradenbogen linialen, enz. enz.

P. NOORDHOFF — GRONINGEN-BATAVIA